Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ФИЗМАТГИЗ · 1960

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

11-3-2

АННОТАЦИЯ

В книге излагаются свойства гиперболических и обратных гиперболических функций и даются соотношения между ними и другими элементарными функциями. Показаны применения гиперболических функций к интегрированию функций и дифференциальных уравнений. Разобрано много задач из разных областей естествознания и техники.

Все разделы сопровождаются упражнениями для самостоятельного решения. Книга снабжена справочным и табличным материалом и может быть использована в качестве справочника по гиперболическим функциям как студентами, так и инженерами и техниками.

Для чтения книги достаточно знания элементов высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА III
ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

Приложения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая небольшая книга может служить в качестве учебного пособия по гиперболическим функциям. В ней излагаются основные сведения об этих функциях и приводятся примеры применения их в математическом анализе, геометрии, механике и физике. Каждый параграф снабжен упражнениями. Самостоятельное решение хотя бы некоторой части приведенных упражнений поможет читателю закрепить соответствующий теоретический материал и научиться свободно владеть гиперболическими функциями.

В конце книги приложены различные таблицы. Вместе с формулами, содержащимися в основном тексте, а также в некоторых упражнениях, завершающих параграфы, они позволяют использовать книгу и как справочник по гиперболическим функциям.

Автор выражает свою благодарность Р. С. Гутеру, Г. Л. Лунцу, Р. Я. Шостаку, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний, и особенно Ф. Л. Варпаховскому за большую работу по редактированию книги.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Введение. Определение гиперболических функций

В математике и ее приложениях к естествознанию и технике находят широкое применение показательные функции. Это, в частности, объясняется тем, что многие изучаемые в естествознании явления относятся к числу так называемых процессов органического роста, в которых скорости изменения участвующих в них функций пропорциональны величинам самих функций. Если обозначить через y функцию, а через x аргумент, то дифференциальный закон процесса органического роста может быть записан в виде

$$\frac{dy}{dx}=ky,$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Интегрирование этого уравнения приводит к общему решению в виде показательной функции

$$y=Ce^{kx}.$$

Если задать начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$, то можно определить произвольную постоянную $C=y_0e^{-kx_0}$ и, таким образом, найти частное решение

$$y=y_0e^{k(x-x_0)},$$

которое представляет собой интегральный закон рассматриваемого процесса.

К процессам органического роста относятся при некоторых упрощающих предположениях такие явления, как, например, изменение атмосферного давления в зависимости от высоты над поверхностью Земли, радиоактивный распад, охлаждение или нагревание тела в окружающей среде постоянной температуры, унимолекулярная химическая реакция (например, растворение вещества в воде), при которой имеет место закон действия масс (скорость реакции пропорциональна наличному количеству реагирующего вещества), размножение микроорганизмов и многие другие.

Возрастание денежной суммы вследствие начисления на нее сложных процентов (проценты на проценты) также представляет собой процесс органического роста.

Эти примеры можно было бы продолжить.

Наряду с отдельными показательными функциями в математике и ее приложениях находят применение различные комбинации показательных функций, среди которых особое значение имеют некоторые линейные и дробно-линейные комбинации функций e^x и e^{-x} — так называемые *гиперболические* функции. Этих функций шесть, для них введены следующие специальные наименования и обозначения:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(\textit{гиперболический синус})},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(\textit{гиперболический косинус})},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(\textit{гиперболический тангенс})},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(\textit{гиперболический котангенс})},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(\textit{гиперболический секанс})},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(\textit{гиперболический косеканс})}.$$

Возникает вопрос, почему даны именно такие названия, при чем здесь гипербола и известные из тригонометрии названия функций: синус, косинус и т. д.? Как мы сейчас убедимся, эти названия не случайны. Оказывается, что соотношения, связывающие тригонометрические функции с координатами точек окружности единичного радиуса, аналогичны соотношениям, связывающим гиперболические функции с координатами точек равносторонней гиперболы с единичной полуосью. Этим как раз и оправдывается наименование гиперболических функций.

Возьмем на окружности $x^2+y^2=1$ (рис. 1) точку $M(x, y)$, построим острый центральный угол $\angle AOM = t$ и опустим из точки M перпендикуляр MB на ось Ox. Тогда $\sin t = BM$ (так как радиус окружности $OM=1$), а $\cos t = OB$. Проведя в точках A и P касательные к окружности до пересечения их с продолжением радиуса в точках C и N, будем иметь: $\operatorname{tg} t = AC$, $\operatorname{ctg} t = PN$, $\sec t = OC$ и $\operatorname{cosec} t = ON$.

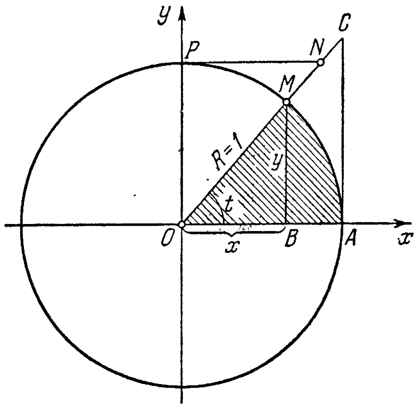

Рис. 1.

Заметим, что между центральным углом t (выраженным в радианах) и площадью S кругового сектора AOM имеется простая зависимость: $t=2S$. В самом деле, как известно, $S=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AM}\cdot R$, где $\overset{\smile}{AM}$ — дуга окружности, на которую опирается центральный угол t, а R — радиус окружности. Из определения радианной меры угла следует, что $\overset{\smile}{AM}=Rt$, но в нашем случае $R=1$, и потому $S=\frac{t}{2}$, или $t=2S$. Следовательно, аргумент t тригонометрических функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и т. д., который обычно истолковывается геометрически как угол, может рассматриваться при желании как удвоенная площадь кругового сектора AOM. Именно такое толкование аргумента t мы примем в дальнейшем.

Теперь возьмем равностороннюю гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 2) и произведем такие же построения, что и для окружности. Покажем, что $\operatorname{sh} t = BM$, $\operatorname{ch} t = OB$, $\operatorname{th} t = AC$ и т. д., где t есть удвоенная площадь гиперболического сектора AOM (но не угол!).

Непосредственно из чертежа имеем: $t = 2S = 2$ (пл. OMB — пл. AMB), но пл. $OMB = \frac{1}{2} OB \cdot BM = \frac{1}{2} xy$, где x и y — координаты точки M гиперболы, а пл. AMB можно вычислить с помощью определенного интеграла. Из уравнения

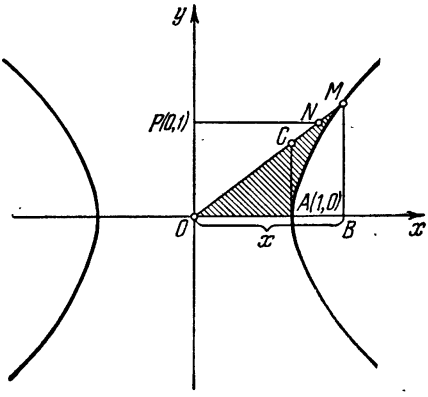

Рис. 2.

равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ находим, что для точек ее верхней части $y = \sqrt{x^2 - 1}$, а потому пл. $AMB = \int_1^x y\,dx = \int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx$.

Для вычисления этого интеграла применим способ интегрирования по частям, положив $u = \sqrt{x^2 - 1}$, а $dv = dx$. Тогда получим $du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $v = x$ и, следовательно,

$$\int_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx = x\sqrt{x^2 - 1}\Big|_1^x - \int_1^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Первый член правой части равен xy, а второй преобразуем следующим образом:

$$\int_1^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^x \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx + \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл может быть записан в виде

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = xy - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Второй член правой части последнего равенства есть вычисляемый интеграл; перенеся его влево, разделив обе части полученного равенства на 2 и учитывая, что

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^x = \ln(x+y),$$

будем иметь:

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\,xy - \frac{1}{2}\ln(x+y).$$

Итак,

$$t = 2\left[\frac{1}{2}\,xy - \frac{1}{2}\,xy + \frac{1}{2}\ln(x+y)\right] = \ln(x+y)$$

или, потенцируя,

$$x+y=e^t.$$

Если разделить обе части уравнения равносторонней гиперболы $x^2-y^2=1$ на соответствующие части последнего уравнения, то получим еще одно уравнение, связывающее x и y:

$$x-y=e^{-t}.$$

Из системы этих двух уравнений относительно x и y получаем:

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \qquad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

Так как x и y равны соответственно OB и BM, а полученные комбинации показательных функций, согласно определению, равны $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$, то $OB = \operatorname{ch} t$ и $BM = \operatorname{sh} t$.

Заметим попутно, что уравнения $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, рассматриваемые совместно, являются параметрическими уравнениями равносторонней гиперболы с полуосью a (точнее, ее правой ветви), подобно тому как параметрическими уравнениями окружности радиуса a являются уравнения $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. В самом деле, исключим параметр t, для чего возведем в квадрат обе части каждого из уравнений и из x^2 вычтем y^2:

$$a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2 \operatorname{sh}^2 t = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) =$$

$$= a^2 \left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= a^2 \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}\right) = a^2,$$

т. е. $x^2 - y^2 = a^2$, а это и есть уравнение равносторонней гиперболы в канонической форме.

Если провести касательную к гиперболе в точке A до ее пересечения с прямой OM в точке C, то из подобия треугольников AOC и BOM имеем:

$$\frac{AC}{BM} = \frac{OA}{OB},$$

откуда

$$AC = \frac{BM}{OB} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{th} t.$$

Аналогичным образом, отложив на оси Oy отрезок $OP = 1$ и проведя из точки P прямую параллельно оси Ox до пересечения с прямой OM в точке N, можно показать, что $PN = \operatorname{cth} t$. Это вытекает из подобия треугольников OPN и OBM; имеем:

$$\frac{PN}{OB} = \frac{OP}{BM},$$

откуда

$$PN = \frac{OB}{BM} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \operatorname{cth} t.$$

Так же легко убедиться в том, что OC и ON равны соответственно $\operatorname{sch} t$ и $\operatorname{csch} t$. Мы на этом останавливаться не будем.

Выясним теперь, как изменяются гиперболические функции при изменении аргумента, который в дальнейшем будем обозначать через x.

Непосредственно из определения $\operatorname{sh} x$ имеем $\operatorname{sh} 0 = 0$. Если переписать выражение для $\operatorname{sh} x$ в виде

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right),$$

то мы обнаружим, что когда аргумент x возрастает от 0 до $+\infty$, то первый член e^x возрастает неограниченно, а второй член $1/e^x$ убывает, стремясь к нулю. Следовательно, $\operatorname{sh} x$ при $x \to +\infty$ принимает сколь угодно большие положительные значения, стремясь к $+\infty$. При изменении аргумента от 0 до $-\infty$ первый член $e^x \to 0$, а второй $e^{-x} \to +\infty$, следовательно, $\operatorname{sh} x$ при $x \to -\infty$ стремится к $-\infty$.

Таким образом, областью определения и областью значений функции $\operatorname{sh} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$.

Из определения $\operatorname{ch} x$ имеем $\operatorname{ch} 0 = 1$. Если переписать выражение для $\operatorname{ch} x$ в виде $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)$, то легко установить, что при изменении x от 0 от $+\infty$ $\operatorname{ch} h$ возрастает от 1 до $+\infty$, а при изменении x от $-\infty$ до 0 $\operatorname{ch} x$ убывает от $+\infty$ до 1, так как $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, что следует непосредственно из определения.

Таким образом, областью определения функции $\operatorname{ch} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — промежуток $[1, +\infty)$.

Если в равенстве $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ разделить числитель и знаменатель правой части на e^x, то получим $\operatorname{th} x = \dfrac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$, откуда заключаем, что $\operatorname{th} x$ представляет собой правильную дробь, поскольку числитель всегда меньше знаменателя; при этом $\operatorname{th} 0 = 0$.

При изменении x от 0 до $+\infty$ $\operatorname{th} x$ возрастает от 0 до $+1$, а при изменении x от $-\infty$ до 0 — возрастает от -1 до 0. Таким образом, областью определения функции $\operatorname{th} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — промежуток $(-1, 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$.

Из равенства $\operatorname{cth} x = \dfrac{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}}{1 - \dfrac{1}{e^{2x}}}$ находим, что $\operatorname{cth} x$ при изменении x от 0 до $+\infty$ убывает от $+\infty$ до 1, а при изменении x от $-\infty$ до 0 убывает от -1 до $-\infty$. В точке $x=0$ $\operatorname{cth} x$ не определен: при стремлении x к 0 справа $\operatorname{cth} x \to +\infty$, при стремлении x к 0 слева $\operatorname{cth} x \to -\infty$.

Областью определения функции $\operatorname{cth} x$ являются промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а областью значений — промежутки $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Таким образом, $|\operatorname{cth} x| > 1$.

Совершенно аналогично можно исследовать изменение функций $\operatorname{sch} x$ и $\operatorname{csch} x$. Мы на этом останавливаться не будем.

Заметим, что при достаточно больших значениях x $(x > 0)$ значения $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ мало отличаются от соответствующих значений $e^x/2$, а значения $\operatorname{th} x$ — от $+1$. При достаточно больших по абсолютной величине, но отрицательных значениях x функция $\operatorname{sh} x$ мало отличается от $-e^{-x}/2$, $\operatorname{ch} x$ — от $e^{-x}/2$, а $\operatorname{th} x$ — от -1.

Если произвести замену аргумента x на $-x$, то получим:

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{th} x,$$

$$\operatorname{cth}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\operatorname{cth} x,$$

что доказывает четность функции $\operatorname{ch} x$ и нечетность функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

Непосредственно из определения $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ следует, что

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x,$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

т. е. что функции e^x и e^{-x} могут быть представлены как сумма и разность четной и нечетной функций.

Ниже приведены графики гиперболических функций с их краткими описаниями.

График гиперболического синуса $y = \operatorname{sh} x$ приведен на рис. 3. Функция нечетная, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат график имеет центр симметрии и точку перегиба. Угол φ, образованный с осью абсцисс касательной в этой точке, равен $\pi/4$. Асимптот нет.

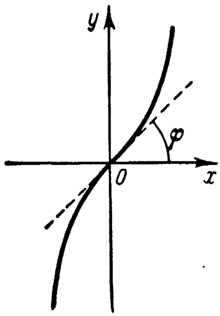

Рис. 3.

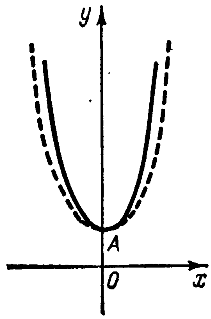

Рис. 4.

График гиперболического косинуса $y = \operatorname{ch} x$ (рис. 4) называется *цепной линией* (см. стр. 92). Функция $y = \operatorname{ch} x$ четная, при $x < 0$ убывает от $+\infty$ до $+1$, при $x > 0$ возрастает от $+1$ до $+\infty$. Минимум в точке A (0, 1). График симметричен относительно оси Oy. Интересно отметить, что он расположен выше параболы $y = 1 + \frac{x^2}{2}$, показанной на рис. 4 пунктиром. Асимптот не имеет.

График гиперболического тангенса $y = \operatorname{th} x$ приведен на рис. 5. Функция нечетная, монотонно возрастает от -1 до $+1$. В начале координат график имеет точку перегиба и центр симметрии. Угол φ, образованный с осью абсцисс касательной в этой точке, равен $\pi/4$. График имеет горизонтальные асимптоты $y = \pm 1$.

График гиперболического котангенса $y = \operatorname{cth} x$ приведен на рис. 6. Функция нечетная; $x = 0$ — точка бесконечного разрыва. При $x<0$ функция $\operatorname{cth} x$ убывает от -1 до $-\infty$, при $x>0$ убывает от $+\infty$ до $+1$. Экстремумов не имеет.

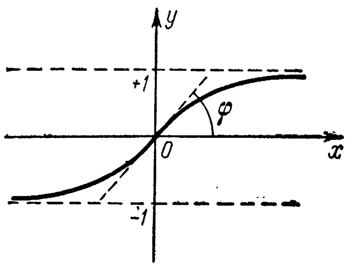

Рис. 5.

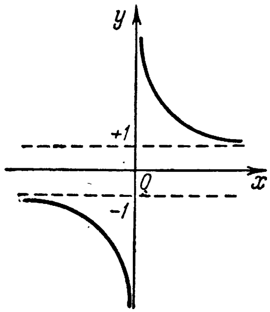

Рис. 6.

Точек перегиба у графика нет, имеются асимптоты: горизонтальные $y=\pm 1$ и вертикальная $x=0$.

2. Соотношения между гиперболическими функциями

Различные тригонометрические функции одного и того же аргумента связаны между собой рядом известных соотношений. Аналогичные соотношения имеют место и для гиперболических функций. При этом основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ соответствует тождество, связывающее гиперболические синус и косинус:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \tag{1}$$

в справедливости которого легко убедиться простой проверкой.

Имеем:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^x e^{-x}=1.$$

Некоторые важные соотношения могут быть получены непосредственно из определения гиперболических функций и из формулы (1):

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \tag{2}$$

$$\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x, \tag{3}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{csch} x, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{sch} x, \tag{6}$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \operatorname{sch}^2 x, \tag{7}$$

$$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x. \tag{8}$$

Соотношения (2) и (3) получаются путем деления $\operatorname{sh} x$ на $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{ch} x$ на $\operatorname{sh} x$. Соотношения (4), (5) и (6) проверяются непосредственно, а (7) и (8) получаются из (1) делением обеих его частей соответственно на $\operatorname{ch}^2 x$ и $\operatorname{sh}^2 x$ с учетом предыдущих соотношений.

Пользуясь этими восемью формулами, можно, как и для тригонометрических функций, любую гиперболическую функцию аргумента x выразить через любую другую гиперболическую функцию того же аргумента. Ниже приводится соответствующая таблица для первых четырех функций:

$\operatorname{sh} x =$		$\pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{ch} x =$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{th} x =$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$		$\dfrac{1}{\operatorname{cth} x}$
$\operatorname{cth} x =$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	

Здесь имеет место очень простое правило знаков: $\operatorname{ch} x$ всегда положителен, а $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ имеют тот же знак, что и аргумент. Соответственно этому правилу, если $x > 0$, то следует перед корнем взять знак плюс, а если $x < 0$, то надо взять знак минус.

Легко также вывести формулы для гиперболических функций суммы и разности аргументов, двойного и половинного аргумента, а также для сумм, разностей и произведений гиперболических функций. Эти формулы аналогичны соответветствующим тригонометрическим формулам.

Приводим сводку этих формул.

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{9}$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{10}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{11}$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{12}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \tag{13}$$

$$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \tag{14}$$

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}, \tag{15}$$

$$\operatorname{cth}(x-y) = \frac{1 - \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x - \operatorname{cth} y}, \tag{16}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \tag{17}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1, \tag{18}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \tag{19}$$

$$\operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}, \tag{20}$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \tag{21}$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}, \tag{22}$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}, \tag{23}$$

$$\operatorname{cth}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{ch}x-1}}, \tag{24}$$

$$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}, \tag{25}$$

$$\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}, \tag{26}$$

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}, \tag{27}$$

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}, \tag{28}$$

$$\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}, \tag{29}$$

$$\operatorname{cth}x\pm\operatorname{cth}y=\frac{\operatorname{sh}(y\pm x)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}, \tag{30}$$

$$\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)], \tag{31}$$

$$\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)], \tag{32}$$

$$\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)]. \tag{33}$$

Формулы (9)—(12) могут быть выведены следующим образом. Из определения имеем:

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$$

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),$$

$$\operatorname{sh}y=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y}),$$

$$\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y}).$$

Перемножая отдельно левые и правые части этих тождеств, составим следующие выражения:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}\right),$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right),$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right),$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right).$$

Теперь легко найти, что

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y),$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2} = \operatorname{sh}(x-y),$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{ch}(x+y),$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^{x-y} + e^{-(x-y)}}{2} = \operatorname{ch}(x-y).$$

Таким образом, формулы (9)—(12) проверены.

Формулы (13) и (14) получаются путем деления обеих частей формул (9) и (10) на соответствующие части формул (11) и (12) с последующим преобразованием полученных правых частей к виду, содержащему только гиперболические тангенсы; для этого следует числители и знаменатели правых частей разделить на $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$.

Формулы (15) и (16) получаются аналогичным образом путем деления обеих частей формул (11) и (12) на соответствующие части формул (9) и (10).

Для вывода формул (17)—(20) следует положить $y = x$ в формулах (9), (11), (13) и (15).

Формулы (21) и (22) можно вывести, исходя из формул (18) и (1), заменяя в них x через $x/2$. Имеем:

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = 1.$$

Вычитая и складывая, получим:

$$\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{2},$$
$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{2},$$

откуда вытекают формулы (21) и (22).

Для получения формул (23) и (24) следует разделить обе части формулы (21) на соответствующие части формулы (22), и наоборот.

Для вывода формул (25) и (26) выпишем формулы (9) и (10), заменив в них x и y через α и β:

$$\operatorname{sh}(\alpha+\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta+\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{sh}(\alpha-\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta-\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$

Складывая и вычитая, получим:

$$\operatorname{sh}(\alpha+\beta)+\operatorname{sh}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta,$$
$$\operatorname{sh}(\alpha+\beta)-\operatorname{sh}(\alpha-\beta)=2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$

В этих формулах положим $\alpha+\beta=x$ и $\alpha-\beta=y$, откуда $\alpha=\frac{x+y}{2}$, а $\beta=\frac{x-y}{2}$, и формулы (25) и (26) проверены.

Аналогичным образом поступим для вывода формул (27) и (28). Возьмем соотношения:

$$\operatorname{ch}(\alpha+\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{ch}(\alpha-\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$

Складывая и вычитая, получим:

$$\operatorname{ch}(\alpha+\beta)+\operatorname{ch}(\alpha-\beta)=2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta,$$
$$\operatorname{ch}(\alpha+\beta)-\operatorname{ch}(\alpha-\beta)=2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$

Полагая, как ранее, $\alpha+\beta=x$ и $\alpha-\beta=y$ и, следовательно, $\alpha=\frac{x+y}{2}$, а $\beta=\frac{x-y}{2}$, получим формулы (27) и (28).

Формулы (29) получим путем преобразования выражений $\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y$:

$$\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\pm\frac{\operatorname{sh}y}{\operatorname{ch}y}=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y}.$$

Аналогично получаются формулы (30).

Формулу (32) легко вывести путем сложения соответствующих частей формул (9) и (10), а формулы (31) и (33) —

путем вычитания и сложения соответствующих частей формул (11) и (12).

В дальнейшем будет показано, какие многочисленные применения находят гиперболические функции. Здесь же мы пока ограничимся приложением гиперболических функций к решению кубических уравнений.

Если кубическое уравнение имеет так называемый приведенный вид *):

$$x^3+3px+2q=0,$$

то, как доказывается в курсе высшей алгебры, корни его можно вычислить с помощью тригонометрических и гиперболических функций по следующей таблице:

$p<0$		$p>0$
$q^2+p^3\leqslant 0$	$q^2+p^3>0$	
$\cos\varphi=\frac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi=\frac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi=\frac{q}{r^3}$
$x_1=-2r\cos\frac{\varphi}{3}$ $x_2=2r\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\varphi}{3}\right)$ $x_3=2r\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\varphi}{3}\right)$	$x_1=-2r\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$ $x_2=r\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}+$ $+i\sqrt{3}r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$ $x_3=r\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}-$ $-i\sqrt{3}r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$	$x_1=-2r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$ $x_2=r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}+$ $+i\sqrt{3}r\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$ $x_3=r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-$ $-i\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$

*) Заметим, что любое кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ можно преобразовать к приведенному виду подстановкой $x=y-\frac{b}{3a}$. При этом коэффициенты обоих видов уравнения связаны следующими соотношениями:

$$3p=\frac{3ac-b^2}{3a^2},\qquad 2q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}.$$

Здесь $r=\pm\sqrt{|p|}$, причем знак r должен совпадать со знаком q. Вспомогательная величина φ определяется из приведенной таблицы в зависимости от знаков p и суммы q^2+p^3 по формуле, расположенной в соответствующем столбце таблицы. Вычислив r и φ, находят все три корня x_1, x_2, x_3 по формулам в том же столбце.

В качестве примера решим кубическое уравнение $x^3+2x-1=0$. Имеем $p=\frac{2}{3}$, $q=-\frac{1}{2}$. Следовательно, $q^2+p^3=\frac{1}{4}+\frac{4}{9}>0$, а так как $p>0$, то следует воспользоваться третьим столбцом таблицы.

По формуле для вычисления r определяем, что $r=-\sqrt{\frac{2}{3}}=-0{,}816$, а из таблицы находим, что $\operatorname{sh}\varphi=\frac{q}{r^3}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}=0{,}916$. Пользуясь таблицами гиперболического синуса (см. стр. 179), получаем $\varphi=0{,}82$. Следовательно, $\frac{\varphi}{3}=0{,}27$, а $\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}=\operatorname{sh}0{,}27=0{,}273$, $\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}=\operatorname{ch}0{,}27=1{,}037$. Подставляя вычисленные значения r, $\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}$ и $\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}$ в формулы для нахождения корней, получаем:

$$x_1=-2r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}=2\cdot 0{,}816\cdot 0{,}273=0{,}445,$$

$$\begin{aligned}x_2&=r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}+ir\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}=\\&=-0{,}816\cdot 0{,}273-i\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3}\cdot 1{,}037=\\&=-0{,}223-1{,}466i,\end{aligned}$$

$$x_3=r\operatorname{sh}\frac{\varphi}{3}-ir\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{\varphi}{3}=-0{,}223+1{,}466i.$$

Упражнения

1. Проверить справедливость следующих формул:

1) $\operatorname{sh}2x=\dfrac{2\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}^2x}$;

2) $\operatorname{sh}3x=4\operatorname{sh}^3x+3\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}x\,(4\operatorname{ch}^2x-1)$;

3) $\operatorname{sh}(n+1)x=2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}nx-\operatorname{sh}(n-1)x$;

4) $\operatorname{ch} 2x = \dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{1-\operatorname{th}^2 x}$;

5) $\operatorname{ch} 3x = 4\operatorname{ch}^3 x - 3\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x\,(4\operatorname{sh}^2 x + 1)$;

6) $\operatorname{ch}(n+1)x = 2\operatorname{ch} x \operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n-1)x$;

7) $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2}{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}$;

8) $\operatorname{th} 3x = \dfrac{\operatorname{th}^3 x + 3\operatorname{th} x}{3\operatorname{th}^2 x + 1}$;

9) $\operatorname{cth} 2x = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}{2}$;

10) $\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$.

2. Нижеследующие формулы выражают степени гиперболических функций через гиперболические функции кратных аргументов; проверить их.

1) $2\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1$;
2) $4\operatorname{sh}^3 x = \operatorname{sh} 3x - 3\operatorname{sh} x$;
3) $8\operatorname{sh}^4 x = \operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3$;
4) $16\operatorname{sh}^5 x = \operatorname{sh} 5x - 5\operatorname{sh} 3x + 10\operatorname{sh} x$;
5) $32\operatorname{sh}^6 x = \operatorname{ch} 6x - 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x - 10$;
6) $64\operatorname{sh}^7 x = \operatorname{sh} 7x - 7\operatorname{sh} 5x + 21\operatorname{sh} 3x - 35\operatorname{sh} x$;
7) $128\operatorname{sh}^8 x = \operatorname{ch} 8x - 8\operatorname{ch} 6x + 28\operatorname{ch} 4x - 56\operatorname{ch} 2x + 35$;
8) $2\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1$;
9) $4\operatorname{ch}^3 x = \operatorname{ch} 3x + 3\operatorname{ch} x$;
10) $8\operatorname{ch}^4 x = \operatorname{ch} 4x + 4\operatorname{ch} 2x + 3$;
11) $16\operatorname{ch}^5 x = \operatorname{ch} 5x + 5\operatorname{ch} 3x + 10\operatorname{ch} x$;
12) $32\operatorname{ch}^6 x = \operatorname{ch} 6x + 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x + 10$;
13) $64\operatorname{ch}^7 x = \operatorname{ch} 7x + 7\operatorname{ch} 5x + 21\operatorname{ch} 3x + 35\operatorname{ch} x$;
14) $128\operatorname{ch}^8 x = \operatorname{ch} 8x + 8\operatorname{ch} 6x + 28\operatorname{ch} 4x + 56\operatorname{ch} 2x + 35$.

3. Доказать, что

1) $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$;

2) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$;

3) $\operatorname{ch} 2x + \cos 2y = 2 + 2(\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 y) = 2(\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y)$;

4) $\operatorname{ch} 2x - \cos 2y = 2(\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y)$;

5) $\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y)\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y$;

6) $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$;

7) $\operatorname{cth} x \pm \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{ch}(x \pm y)}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}$;

8) $\operatorname{csch}^2 x - \operatorname{sch}^2 x = \operatorname{csch}^2 x \operatorname{sch}^2 x$.

4. Решить следующие кубические уравнения:

1) $x^3+9x-26=0$. *Отв.* $x_1=2$; $x_{2,3}=-1\pm 2i\sqrt{3}$.

2) $x^3+1{,}25x-3{,}72=0$.

Отв. $x_1=1{,}282$; $x_{2,3}=-0{,}641\pm 1{,}579i$.

3) $x^3-8x+15=0$.

Отв. $x_1=-3{,}504$; $x_{2,3}=1{,}752\pm 1{,}100i$.

5. Найти корни уравнения $\operatorname{sh} x-3\operatorname{ch} x+9=0$.

Отв. $x_1=2{,}1716$; $x_2=-1{,}4784$.

6. Выразить координаты точки $M(x, y)$ гиперболы $x^2-y^2=a^2$ как функции площади S гиперболического сектора OLM, ограниченного дугой гиперболы LM и двумя лучами OM и OL, где $L(x, -y)$ — точка, симметричная M относительно оси Ox.

Отв. $x=a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2}$, $y=a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}$.

3. Обратные гиперболические функции

Если $x=\operatorname{sh} y$, то, желая выразить зависимость y от x, обозначают y символом $\operatorname{Arsh} x$ (читается *«ареасинус гиперболический»*) или, более подробно, *y есть площадь, гиперболический синус которой равен x* (area — латинское слово, означающее в переводе площадь). Подобным же образом определяются и другие обратные гиперболические функции, а именно:

если $x=\operatorname{ch} y$, то $y=\operatorname{Arch} x$ (*ареакосинус гиперболический*);
если $x=\operatorname{th} y$, то $y=\operatorname{Arth} x$ (*ареатангенс гиперболический*);
если $x=\operatorname{cth} y$, то $y=\operatorname{Arcth} x$ (*ареакотангенс гиперболический*).

Графики обратных гиперболических функций с их краткими описаниями приводятся ниже.

Ареасинус $y=\operatorname{Arsh} x$ (рис. 7). Функция нечетная, область определения $-\infty<x<+\infty$, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат — точка перегиба и центр симметрии графика. Угол φ, образованный с осью абсцисс касательной в этой точке, равен $\pi/4$. Асимптот не имеет.

Ареакосинус $y=\operatorname{Arch} x$ (рис. 8). Функция двузначная, область определения каждой ветви $1\leqslant x<+\infty$. График симметричен относительно оси Ox; в точке $A(1, 0)$

имеется вертикальная касательная $x=1$, при возрастании $x\,(x>1)$ y по абсолютной величине возрастает.

Ареатангенс $y=\operatorname{Arth} x$ (рис. 9). Функция нечетная, область определения $-1<x<+1$, монотонно возрастает

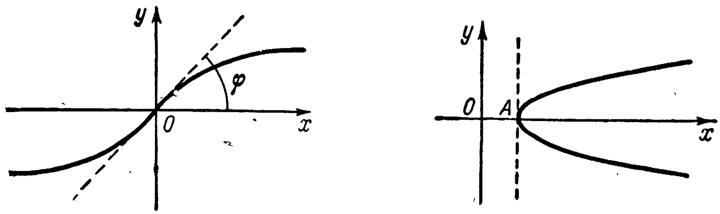

Рис. 7. Рис. 8.

от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат — точка перегиба и центр симметрии графика. Угол φ, образованный с осью абсцисс касательной в этой точке, равен $\pi/4$. Вертикальные асимптоты $x=\pm 1$.

Ареакотангенс $y=\operatorname{Arcth} x$ (рис. 10). Функция нечетная, область определения $|x|>1$. При $-\infty<x<-1$

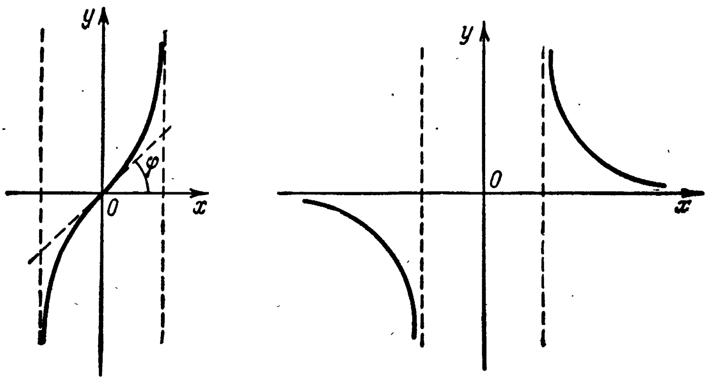

Рис. 9. Рис. 10.

убывает от 0 до $-\infty$, при $+1<x<+\infty$ убывает от $+\infty$ до 0. Экстремумов и точек перегиба нет. Имеются горизонтальная асимптота $y=0$ и вертикальные асимптоты $x=\pm 1$.

Любую из обратных гиперболических функций можно выразить через остальные функции. Приведем соответствующую таблицу.

$\operatorname{Arsh} x =$		$\pm \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{Arth} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Arcth} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{Arch} x =$	$\pm \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1}$		$\pm \operatorname{Arth} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm \operatorname{Arcth} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x =$	$\operatorname{Arsh} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm \operatorname{Arch} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcth} \dfrac{1}{x}$
$\operatorname{Arcth} x =$	$\operatorname{Arsh} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm \operatorname{Arch} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Arth} \dfrac{1}{x}$	

Следует иметь в виду, что при выражении функций через ареакосинус последний надо брать со знаком плюс при $x>0$ и со знаком минус при $x<0$. Это объясняется двузначностью ареакосинуса и нечетностью остальных функций, которые при $x>0$ положительны, а при $x<0$ отрицательны. Выражения же самого ареакосинуса через остальные функции (вторая строка) надо брать с двумя знаками, что также объясняется его двузначностью.

Легко убедиться в справедливости приведенных в таблице соотношений. Для примера выразим $\operatorname{Arsh} x$ через остальные функции. Пусть $y = \operatorname{Arsh} x$, тогда $\operatorname{sh} y = x$ и, следовательно, $\operatorname{ch} y = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} = \sqrt{x^2+1}$, откуда $y = \pm \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1}$; $\operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, откуда $y = \operatorname{Arth} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\operatorname{cth} y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}}{\operatorname{sh} y} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, откуда $y = \operatorname{Arcth} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Аналогично проверяются и остальные соотношения.

Суммы и разности обратных гиперболических функций выражаются следующим образом:

$$\operatorname{Arsh} x + \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right), \tag{1}$$

$$\operatorname{Arsh} x - \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}\left(x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2}\right), \tag{2}$$

$$\operatorname{Arch} x + \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}\left[xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right], \tag{3}$$

$$\operatorname{Arch} x - \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}\left[xy - \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right], \tag{4}$$

$$\operatorname{Arth} x + \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth}\frac{x+y}{1+xy}, \tag{5}$$

$$\operatorname{Arth} x - \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth}\frac{x-y}{1-xy}. \tag{6}$$

Проверим формулу (1). Для этого обозначим: $\operatorname{Arsh} x = u$, $\operatorname{Arsh} y = v$; тогда $\operatorname{sh} u = x$, $\operatorname{sh} v = y$, $\operatorname{ch} u = \sqrt{x^2+1}$, $\operatorname{ch} v = \sqrt{y^2+1}$; преобразуем выражение $\operatorname{sh}(\operatorname{Arsh} x + \operatorname{Arsh} y) = \operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$, откуда $\operatorname{Arsh} x + \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}\left(x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\right)$.

Аналогично проверяются остальные формулы.

Подобно тому как гиперболические функции выражаются через показательные, обратные гиперболические функции могут быть выражены через функции, обратные показательным, т. е. через логарифмические.

В самом деле, если, например, $y = \operatorname{Arsh} x$, то отсюда следует, что $x = \operatorname{sh} y$, а так как $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, то $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$, или $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$. Рассматривая это равенство как квадратное уравнение относительно неизвестного e^y, находим $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ (знак минус перед корнем в действительной области невозможен, ибо при действительных значениях x величина e^y всегда положительна). Следовательно, $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, а так как $y = \operatorname{Arsh} x$, то

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{7}$$

Аналогичным образом получаем следующие формулы:

$$\operatorname{Arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) \qquad (x \geqslant 1), \tag{8}$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (|x| < 1), \tag{9}$$

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad (|x| > 1). \tag{10}$$

Для вывода формулы (8) исходим из того, что если $y = \operatorname{Arch} x$, то $x = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$, откуда $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ и $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (знак минус здесь необходимо сохранить, так как правая часть будет положительной и в этом случае). Логарифмируя последнее равенство, получим формулу (8).

Заметим, что формуле (8) можно придать несколько иной вид, а именно:

$$\operatorname{Arch} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Для этого достаточно показать, что $\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Но в этом легко убедиться с помощью следующего преобразования:

$$\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Если взять $y = \operatorname{Arth} x$, то $x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$, откуда $e^y(1 - x) = e^{-y}(1 + x)$ или $e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$ и, следовательно, $e^y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$, $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$.

Наконец, если взять $y = \operatorname{Arcth} x$, то $x = \operatorname{cth} y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$, откуда $e^y(x - 1) = e^{-y}(x + 1)$ или $e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1}$ и, следовательно, $e^y = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}$, $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$.

Приведенные формулы позволяют выяснить вопрос об области определения обратных гиперболических функций. Из формулы (7) следует, что $\operatorname{Arsh} x$ существует при любом действительном x, так как $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ как при положительном, так и при отрицательном x. Формула (8) показывает, что $\operatorname{Arch} x$ существует только при $x \geqslant 1$, так как $\sqrt{x^2 - 1}$ имеет действительные значения при $|x| \geqslant 1$, но x

не может быть отрицательным, ибо тогда $x \pm \sqrt{x^2-1}$ тоже становится отрицательной величиной, а значит, $\ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$ не может быть действительным. Из формулы (9) вытекает, что $\operatorname{Arth} x$ существует при $|x|<1$, так как для того, чтобы эта функция имела действительные значения, необходимо выполнение неравенства $\frac{1+x}{1-x}>0$, а это возможно для положительных x только при $x<1$, а для отрицательных x только при $x>-1$.

Аналогично предыдущему можно установить, что $\operatorname{Arcth} x$ существует только при $|x|>1$.

Упражнения

1. Проверить справедливость формул, выражающих $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$ и $\operatorname{Arcth} x$ через $\operatorname{Arsh} x$ и другие функции (см. таблицу на стр. 27).
2. Проверить формулы (2), (3), (4), (5) и (6) (см. стр. 28).
3. Доказать, что

$$\operatorname{Arch} x = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{x-1}{2}};$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arch} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arth} \frac{2x}{1+x^2}.$$

4. Дать определение функций $\operatorname{Arsch} x$ и $\operatorname{Arcsch} x$; доказать, что они связаны с логарифмическими функциями соотношениями

$$\operatorname{Arsch} x = \pm \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \qquad (0<x<1),$$

$$\operatorname{Arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right).$$

4. Показательные, тригонометрические и гиперболические функции от комплексного аргумента. Формулы Эйлера

До сих пор мы рассматривали только действительные значения аргумента показательной функции, а также тригонометрических и гиперболических функций. Возникает вопрос, как определить эти функции для комплексных значений аргумента. Ведь обычные, известные из элементарной математики, определения тригонометрических и показательной функций, а следовательно и гиперболических функций, давались только для действительных значений аргумента.

Мы определим эти функции при комплексных, в частности, мнимых значениях аргумента с помощью их разложений в степенные ряды, полагая, что аргумент может принимать не только действительные, но и комплексные значения *).

Итак, если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, то, по определению, под символами e^z, $\sin z$ и $\cos z$ понимают суммы следующих абсолютно сходящихся при любом z рядов **):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots, \tag{1}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \tag{2}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{3}$$

В связи с этим гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ определяются как соответствующие комбинации показательных функций e^z и e^{-z} или равносильными этим комбинациям рядами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{4}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots, \tag{4a}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{5a}$$

---

*) Существуют, впрочем, и другие способы определения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ при комплексном z.

**) Как известно, определения сходимости и абсолютной сходимости рядов с действительными членами, а также правила действия над этими рядами распространяются и на ряды с комплексными членами.

Эти ряды сходятся на всей плоскости z, т. е. при всех комплексных значениях z.

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются с помощью равенств:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{7}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \tag{8}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{9}$$

Распространив понятие показательной и тригонометрических функций на комплексную область, мы обнаружим интересные соотношения между показательными и тригонометрическими функциями, отсутствующие в действительной области.

Согласно нашему определению, функцию e^{iz}, где z — комплексная величина, можно записать в виде ряда

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$ и, вообще, $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$, где $m = 0$, 1, 2, ..., то

$$e^{iz} = \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots\right] + i\left[\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right].$$

Содержащиеся в скобках ряды являются разложениями функций $\cos z$ и $\sin z$, поэтому

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{10}$$

Если в этом равенстве заменить z на $-z$, то получим:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{11}$$

Обе эти формулы дают выражения показательных функций e^{iz} и e^{-iz} через тригонометрические $\cos z$ и $\sin z$. Из них легко получить еще две формулы, выражающие тригонометрические функции $\cos z$ и $\sin z$ через показательные e^{iz} и e^{-iz}:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \tag{12}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{13}$$

Все четыре выведенные формулы называются *формулами Эйлера.* Из первой формулы Эйлера, в частности, получаем:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i,$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$$

$$e^{\frac{5}{2}\pi i} = \cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi = i$$

и т. д. Вообще,

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad e^{(4k+1)\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{(4k+2)\frac{\pi}{2}i} = -1, \quad e^{(4k+3)\frac{\pi}{2}i} = -i,$$

где $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$

Формулы Эйлера позволяют ввести еще одну так называемую *показательную форму* комплексного числа z, наряду с его *алгебраической и тригонометрической формами.*

Как известно, алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z = x + iy$, где x и y — действительные числа.

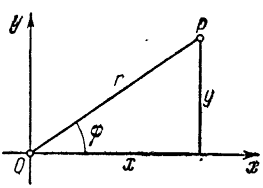

Рис. 11.

Если ввести модуль $|z| = r$ и аргумент $\arg z = \varphi$ числа z (рис. 11), связанные с действительной и мнимой частями x и y числа z соотношениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то из алгебраической формы комплексного числа $z = x + iy$ получим тригонометрическую: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а из нее по формуле Эйлера легко перейти к показательной форме: $z = re^{i\varphi}$.

Заметим, что каждое комплексное число (кроме нуля, для которого понятие аргумента теряет смысл) имеет бесчисленное множество аргументов, ибо увеличение или уменьшение φ на число, кратное 2π, не изменяет комплексного числа. В связи с этим для аргумента приняты два обозначения: $\operatorname{Arg} z$ и $\arg z$. Первое употребляется для всевозможных значений аргумента, а второе — только для главного значения, выделяемого неравенствами $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Если x_1 и x_2 — действительные числа, то справедливо равенство

$$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}.$$

С помощью рядов его можно написать в виде

$$\left(1 + \frac{x_1}{1!} + \frac{x_1^2}{2!} + \ldots + \frac{x_1^n}{n!} + \ldots\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{x_2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} + \ldots + \frac{x_2^n}{n!} + \ldots\right) = \\ = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1!} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x_1 + x_2)^n}{n!} + \ldots$$

Так как сходимость (и притом абсолютная) этих рядов не нарушится при замене действительных чисел x_1 и x_2 любыми комплексными числами z_1 и z_2, а ряды с комплексными членами можно перемножать по правилу умножения рядов с действительными членами, то можно утверждать, что равенство

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

справедливо при любых комплексных числах z_1 и z_2.

Если $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

но $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ и, следовательно,

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$ и одно из значений $\operatorname{Arg} e^z$ равно y. Последнее равенство позволяет вычислять значения показательной функции при любом комплексном показателе степени z. Например, $e^{3-8i}=e^3(\cos 8-i\sin 8)$.

Подобно этому формулы (12) и (13) дают возможность вычислять значения $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном аргументе z. Например,

$$\begin{aligned}\sin(1+2i)&=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\\&=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^2(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=\\&=\frac{\cos 1\,(e^{-2}-e^2)+i\sin 1\,(e^2+e^{-2})}{2i}=\\&=\operatorname{ch}2\sin 1+i\operatorname{sh}2\cos 1.\end{aligned}$$

Ниже будет показан другой, более удобный практически, способ вычисления этих значений, позволяющий получить ответ непосредственно в гиперболических функциях, минуя показательные.

С помощью первой формулы Эйлера можно показать, что в комплексной области показательная функция e^z оказывается периодической с мнимым периодом $2\pi i$.

В самом деле, прибавим к аргументу z показательной функции $f(z)=e^z$ мнимое число $2\pi i$. Получим

$$e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

Периодичность доказана.

В комплексной области тригонометрические функции остаются периодическими и имеют те же периоды, что и в действительной области. В этом легко убедиться с помощью третьей и четвертой формул Эйлера (формулы (12) и (13)), если произвести в них замену z на $z+2\pi$. Так как

$$e^{i(z+2\pi)}=e^{iz+2\pi i}=e^{iz}e^{2\pi i}=e^{iz},$$

а

$$e^{-i(z+2\pi)}=e^{-iz}e^{-2\pi i}=e^{-iz}\frac{1}{e^{2\pi i}}=e^{-iz},$$

то

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,\quad \sin(z+2\pi)=\sin z,$$

что доказывает, что функции $\cos z$ и $\sin z$ периодические и имеют период, равный 2π, и в комплексной области.

Периодичность $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ можно обнаружить с помощью тех же формул. Имеем $e^{i(z+\pi)}=e^{iz+i\pi}=e^{iz}e^{i\pi}=-e^{iz}$, $e^{-i(z+\pi)}=e^{-iz-i\pi}=e^{-iz}\frac{1}{e^{i\pi}}=-e^{-iz}$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg}(z+\pi)=\operatorname{ctg} z.$$

Таким образом, функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ также периодические и имеют период, равный π.

Проверим, что для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное тождество

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1.$$

В самом деле,

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=1.$$

Точно так же сохраняются в комплексной области и все остальные тождества, связывающие тригонометрические функции.

Гиперболические функции в комплексной области также периодические, при этом функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ — период πi. Это вытекает непосредственно из формул (4), (5), (8) и (9). При замене в первых двух формулах z на $z+2\pi i$ они вследствие периодичности функций e^z и e^{-z} остаются без изменения, а при замене в последних двух формулах z на $z+\pi i$ числители и знаменатели правых частей меняют свои знаки на противоположные, что величин самых дробей не изменяет.

Нетрудно убедиться в том, что основное тождество между функциями $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$, а именно: $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$, сохраняется и в комплексной области, так же как и все остальные тождества между гиперболическими функциями.

Упражнения

1. Вычислить действительную и мнимую части числа e^{3+2i}.
   Отв. $-8{,}23+18{,}27i$.
2. Выразить через модуль и аргумент комплексные числа:

$$\text{а) } 1+i; \text{ б) } 1+i\sqrt{3}; \text{ в) } 1-i\sqrt{3}.$$

Отв. а) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; б) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$; в) $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3. Записать в тригонометрической форме числа:

а) $\sqrt{3}-i$; б) $-2+5i$; в) $-2-5i$.

Отв. а) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

б) $\sqrt{29}\left[\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)+i\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)\right]$;

в) $\sqrt{29}\left[\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\right)\right]$.

4. Найти действительную и мнимую части выражений:

а) e^{z^2}; б) ze^z, где $z=x+iy$.

Отв. а) $e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $e^{x^2-y^2}\sin 2xy$;

б) $e^x(x\cos y-y\sin y)$, $e^x(x\sin y+y\cos y)$.

5. Соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями

Наряду с обнаруженной нами в комплексной области связью между тригонометрическими и показательной функциями (формулы Эйлера)

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \tag{1}$$

$$i\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} \tag{2}$$

в комплексной области имеется также очень простая связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Напомним, что, согласно определению:

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}. \tag{4}$$

Если в тождестве (3) произвести замену z на iz, то в правой части получится то самое выражение, которое стоит в правой части тождества (1), откуда вытекает равенство левых частей. То же самое имеет место для тождеств (4) и (2).

Итак

$$\cos z=\operatorname{ch} iz, \tag{5}$$

$$i\sin z=\operatorname{sh} iz \tag{6}$$

Путем деления обеих частей тождества (6) на соответствующие части тождества (5) и, наоборот, (5) на (6) получим:

$$i \operatorname{tg} z = \operatorname{th} iz, \tag{7}$$

$$\frac{1}{i} \operatorname{ctg} z = \operatorname{cth} iz. \tag{8}$$

Аналогичная замена в тождествах (1) и (2) и сравнение с тождествами (3) и (4) дают:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \tag{9}$$

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz. \tag{10}$$

Наконец, из тождеств (9) и (10) находим:

$$i \operatorname{th} z = \operatorname{tg} iz, \tag{11}$$

$$\frac{1}{i} \operatorname{cth} z = \operatorname{ctg} iz. \tag{12}$$

Если в тождествах (5)—(12) положить $z = ix$, где x — действительное число, т. е. считать аргумент чисто мнимым, то получим еще восемь тождеств между тригонометрическими функциями чисто мнимого аргумента и соответствующими гиперболическими функциями действительного аргумента, а также между гиперболическими функциями чисто мнимого аргумента и соответствующими тригонометрическими функциями действительного аргумента:

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \tag{5a}$$

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \tag{6a}$$

$$\operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x, \tag{7a}$$

$$\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x, \tag{8a}$$

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \tag{9a}$$

$$\operatorname{sh} ix = i \sin x, \tag{10a}$$

$$\operatorname{th} ix = i \operatorname{tg} x, \tag{11a}$$

$$\operatorname{cth} ix = -i \operatorname{ctg} x. \tag{12a}$$

Полученные соотношения дают возможность переходить от тригонометрических функций к гиперболическим и от гиперболических функций к тригонометрическим с заменой мнимого аргумента действительным. Они могут быть сформулированы в виде следующего правила:

Для перехода от тригонометрических функций мнимого аргумента к гиперболическим или, наоборот, от гиперболических функций мнимого аргумента к тригонометрическим следует у синуса и тангенса мнимую единицу i вынести за знак функции, а у косинуса отбросить ее вовсе.

Установленная связь замечательна, в частности, тем, что позволяет получить все соотношения между гиперболическими функциями из известных соотношений между тригонометрическими функциями путем замены последних гиперболическими функциями

Покажем, как это делается.

Возьмем для примера основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

и положим в нем $z = ix$, где x — действительное число; получим:

$$\sin^2 ix + \cos^2 ix = 1.$$

Если в этом тождестве заменить синус и косинус гиперболическими синусом и косинусом по формулам $\sin ix = i \operatorname{sh} x$ и $\cos ix = \operatorname{ch} x$, то получим $(i \operatorname{sh} x)^2 + \operatorname{ch}^2 x = 1$, или $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, а это и есть основное тождество между $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, выведенное ранее другим путем.

Аналогичным образом можно вывести все остальные формулы, в том числе формулы для гиперболических функций суммы и разности аргументов, двойного и половинного аргументов и т. д. и, таким образом, из обычной тригонометрии получить «гиперболическую тригонометрию».

Если положить $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, то, применяя формулы для тригонометрических и гиперболических функций суммы аргументов, получим следующие соотношения:

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \tag{13}$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \tag{15}$$

$$\operatorname{ctg}(x+iy)=\frac{\sin 2x-i\operatorname{sh}2y}{-\cos 2x+\operatorname{ch}2y}, \tag{16}$$

$$\operatorname{sh}(x+iy)=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y, \tag{17}$$

$$\operatorname{ch}(x+iy)=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y, \tag{18}$$

$$\operatorname{th}(x+iy)=\frac{\operatorname{sh}2x+i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}, \tag{19}$$

$$\operatorname{cth}(x+iy)=\frac{\operatorname{sh}2x-i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x-\cos 2y}. \tag{20}$$

Формулы (13), (14), (17), (18) получаются непосредственно после замены функций мнимого аргумента соответствующими функциями действительного аргумента; формулы (15), (16), (19), (20) получаются после некоторых преобразований.

Так, например, для формулы (15) имеем:

$$\operatorname{tg}(x+iy)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}iy}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}iy}=\frac{\operatorname{tg}x+i\operatorname{th}y}{1-i\operatorname{tg}x\operatorname{th}y}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}x\,(1-\operatorname{th}^2y)+i\operatorname{th}y\,(1+\operatorname{tg}^2x)}{1+\operatorname{tg}^2x\operatorname{th}^2y}=\frac{\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{ch}^2y}+i\dfrac{\operatorname{th}y}{\cos^2x}}{\dfrac{\sin^2x\operatorname{sh}^2y+\cos^2x\operatorname{ch}^2y}{\operatorname{ch}^2y\cos^2x}}=$$

$$=\frac{\sin x\cos x+i\operatorname{sh}y\operatorname{ch}y}{\dfrac{1+\cos 2x}{2}\operatorname{ch}^2y+\dfrac{1-\cos 2x}{2}\operatorname{sh}^2y}=\frac{\sin 2x+i\operatorname{sh}2y}{\operatorname{ch}2y+\cos 2x}.$$

Путем замены в последних восьми формулах y на $-y$ можно получить еще восемь формул:

$$\sin(x-iy)=\sin x\operatorname{ch}y-i\cos x\operatorname{sh}y, \tag{21}$$

$$\cos(x-iy)=\cos x\operatorname{ch}y+i\sin x\operatorname{sh}y, \tag{22}$$

$$\operatorname{tg}(x-iy)=\frac{\sin 2x-i\operatorname{sh}2y}{\cos 2x+\operatorname{ch}2y}, \tag{23}$$

$$\operatorname{ctg}(x-iy)=\frac{\sin 2x+i\operatorname{sh}2y}{-\cos 2x+\operatorname{ch}2y}, \tag{24}$$

$$\operatorname{sh}(x-iy)=\operatorname{sh}x\cos y-i\operatorname{ch}x\sin y, \tag{25}$$

$$\operatorname{ch}(x-iy)=\operatorname{ch}x\cos y-i\operatorname{sh}x\sin y, \tag{26}$$

$$\operatorname{th}(x-iy)=\frac{\operatorname{sh}2x-i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}, \tag{27}$$

$$\operatorname{cth}(x-iy)=\frac{\operatorname{sh}2x+i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x-\cos 2y}. \tag{28}$$

Упражнения

1. Вычислить: а) $\sin i$; б) $\cos i$; в) $\operatorname{ch} i$.

Отв. а) $\frac{i}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$; б) $\operatorname{ch} 1$; в) $\cos 1$.

2. Найти: а) $\sin(1+2i)$; б) $\operatorname{tg}(2-i)$; в) $\operatorname{sh}(-2+i)$.

Отв. а) $\operatorname{ch} 2 \sin 1 + \operatorname{sh} 2 \cos 1$; б) $\frac{\sin 4 - i \operatorname{sh} 2}{\cos 4 + \operatorname{ch} 2}$; в) $-\cos 1 \operatorname{sh} 2 + i \sin 1 \operatorname{ch} 2$.

3. Вычислить вещественную и мнимую части выражения

$$\cos(2+5i)x + \sin(3-4i)x.$$

Отв. $\cos 2x \operatorname{ch} 5x + \sin 3x \operatorname{ch} 4x$; $-(\sin 2x \operatorname{sh} 5x + \cos 3x \operatorname{sh} 4x)$.

4. Проверить, что показательная функция e^z выражается через тригонометрические функции формулой

$$e^z = \cos iz - i \sin iz.$$

5. Показать, что из равенства $x+iy = \operatorname{ch}(u+iv)$ следует, что

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = 1; \quad \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1.$$

6. Показать, что функция $\cos z$ при чисто мнимом z вещественна и может принимать сколь угодно большие значения.

6. Соотношения между логарифмическими, обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями

Гиперболические функции связаны с показательными определенными соотношениями. Естественно ожидать, что обратные гиперболические функции также связаны с функциями, обратными показательным, т. е. с логарифмическими, некоторыми соотношениями. Чтобы установить эти соотношения, рассмотрим сначала логарифмические функции комплексного аргумента.

Если $z = e^w$, где $z = x+iy \neq 0$, $w = u+iv$, причем x, y, u и v — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, то w называется логарифмом z и обозначается символом $w = \operatorname{Ln} z$. Отсюда следует, что для того, чтобы узнать, чему равен $\operatorname{Ln} z$ при данном значении z, надо решить уравнение $e^w = z$ относительно неизвестного w.

Возьмем комплексное число z в показательной форме $z=re^{i\varphi}\,(r\neq 0)$; тогда наше уравнение преобразуется к виду $e^{u+iv}=re^{i\varphi}$ или $e^u e^{iv}=re^{i\varphi}$. Из равенства двух комплексных чисел следует, что их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π, поэтому $e^u=r$, откуда $u=\ln|z|=\ln r$, где $\ln r$ — обыкновенный натуральный логарифм положительного числа r, а $v=\operatorname{Arg} z=\varphi+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, и таким образом, «комплексный» логарифм равен

$$\operatorname{Ln} z=w=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi),$$

или

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z, \tag{1}$$

где $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$, причем $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

Значение логарифма числа z, которое соответствует главному значению $\operatorname{Arg} z$, называется *главным значением* логарифма числа z и обозначается $\ln z$. Оно получается из общего выражения для $\operatorname{Ln} z$ при $k=0$:

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

Итак, всякое комплексное число z, отличное от нуля, имеет бесчисленное множество комплексных логарифмов, отличающихся друг от друга на слагаемое, кратное $2\pi i$. Следовательно, логарифм в комплексной области есть функция многозначная.

В частности, если z — положительное число, то $|z|=z$, $\arg z=0$ и главное значение $\ln z$ действительное (остальные значения $\operatorname{Ln} z$ комплексные), оно совпадает с известным из анализа значением логарифма. Если же z не является действительным положительным числом, то среди бесконечного множества значений $\operatorname{Ln} z$ нет ни одного действительного, так как ни одно из значений $\operatorname{Arg} z$ не равно нулю.

При $z=0$ функция $\operatorname{Ln} z$ не существует, так как уравнение $e^u=r$ при $r=0$ не имеет корней.

Легко убедиться в том, что основное свойство логарифма в действительной области — логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей — остается в силе и в комплексной области. В самом деле, согласно определению, равенство $w=\operatorname{Ln} z$ равносильно равенству $z=e^w$, и наоборот. Возьмем два равенства: $w_1=\operatorname{Ln} z_1$,

$w_2 = \operatorname{Ln} z_2$; они равносильны равенствам $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$. Перемножив последние два между собой, получим $z_1 z_2 = e^{w_1} e^{w_2}$; так как $e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}$, то $z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2}$. Это равенство равносильно следующему: $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = w_1 + w_2$. Замечая, что $w_1 = \operatorname{Ln} z_1$ и $w_2 = \operatorname{Ln} z_2$, приходим к доказываемому свойству логарифмов:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

Заметим, что так как левая и правая части этого равенства многозначны, то смысл равенства состоит в том, что все множество значений, определяемых его левой частью, совпадает с множеством значений, определяемых правой частью.

Обобщение понятия логарифма на комплексную область дает возможность вычислять все значения натуральных логарифмов действительных, положительных и отрицательных чисел, а также чисел комплексных, в частности чисто мнимых. Так, например, пользуясь формулой (1), получим:

$$\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i,$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i = i\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i + 2k\pi i = i(2k+1)\pi,$$

$$\operatorname{Ln}(-i) = \ln 1 + \frac{3}{2}\pi i + 2k\pi i = i\left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi,$$

$$\operatorname{Ln}(2+3i) = \ln\sqrt{13} + i \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + 2k\pi i =$$
$$= 1{,}2834 + i(0{,}9827 + 2k\pi).$$

Понятие об обратных тригонометрических функциях также обобщается на случай комплексного аргумента. Если, например, $w = \operatorname{Arcsin} z$, где z — комплексное, в частности, чисто мнимое число, то это значит, что $\sin w = z$, и для нахождения w следует поступать аналогично предыдущему, пользуясь формулой $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$. Заметим, что в комплексной области, так же как и в действительной $\operatorname{Arcsin} z$ содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π. Это следует из показанной выше периодичности $\sin w$, а также из формулы (2) на стр. 44.

Точно так же распространяется на случай комплексного аргумента понятие об обратных гиперболических функциях. Например, по определению, равенство $w = \operatorname{Arsh} z$ означает, что $\operatorname{sh} w = z$ и для нахождения w следует поступать, как в случае с $\operatorname{Arcsin} z$, с той лишь разницей, что вместо формулы $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$ следует воспользоваться формулой $\operatorname{sh} w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$.

Установим соотношения между логарифмическими, обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями.

Покажем сначала, как связаны между собой обратные тригонометрические и логарифмические функции.

По определению, если $w = \operatorname{Arcsin} z$, то $z = \sin w$, но по формуле Эйлера $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, поэтому $\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$, откуда $(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$.

Решая это квадратное уравнение относительно e^{iw}, получим $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ (здесь предполагается двузначность квадратного корня), откуда $iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$, а следовательно, $w = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$.

Так как $w = \operatorname{Arcsin} z$, то получаем формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \tag{2}$$

Аналогично можно вывести еще три формулы:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{3}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{4}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}. \tag{5}$$

Приводим выкладки.

Если $w = \operatorname{Arccos} z$, то $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ или $(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$, откуда $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ или $iw = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$, а $w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Если $w = \operatorname{Arctg} z$, то $z = \operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$ или $(1 - iz) e^{iw} = (1 + iz) e^{-iw}$, откуда $e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$ или $iw = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$, а $w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$.

Если $w = \operatorname{Arcctg} z$, то $z = \operatorname{ctg} w = \frac{\cos w}{\sin w} = \frac{i(e^{iw} + e^{-iw})}{e^{iw} - e^{-iw}}$ или $(iz + 1) e^{iw} = (iz - 1) e^{-iw}$, откуда $e^{2iw} = \frac{iz - 1}{iz + 1}$ или $iw = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1}$, а $w = \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz + 1}{iz - 1}$.

Между обратными гиперболическими и логарифмическими функциями соотношения таковы:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \tag{6}$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \tag{7}$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \tag{8}$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}. \tag{9}$$

Формулы эти выводятся таким же образом, как и предыдущие.

Если $w = \operatorname{Arsh} z$, то $z = \operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ или $(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0$, откуда $e^w = z + \sqrt{z^2 + 1}$, а $w = \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$.

Если $w = \operatorname{Arch} z$, то $z = \operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$ или $(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$, откуда $e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, а $w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

Если $w = \operatorname{Arth} z$, то $z = \operatorname{th} w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$ или $(1 - z) e^w = (1 + z) e^{-w}$, откуда $e^{2w} = \frac{1 + z}{1 - z}$, а $w = \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$.

Если $w = \operatorname{Arcth} z$, то $z = \operatorname{cth} w = \dfrac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}}$ или $(z-1)e^w = (z+1)e^{-w}$, откуда $e^{2w} = \dfrac{z+1}{z-1}$, а $w = \operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{z-1}$.

Итак, как обратные тригонометрические, так и обратные гиперболические функции выражаются через логарифмические функции. Следовательно, обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции должны быть связаны между собой.

Соотношения между ними таковы:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Arsh} iz, \tag{10}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Arch} z, \tag{11}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -i \operatorname{Arth} iz, \tag{12}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = i \operatorname{Arcth} iz. \tag{13}$$

Справедливость формулы (11) вытекает непосредственно из формул (3) и (7). Для проверки формулы (10) заменим в формуле (6) z через iz, получим $\operatorname{Arsh} iz = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$. Сравнивая это равенство с формулой (2), убеждаемся в справедливости формулы (10).

Заменяя в формуле (8) z через iz, получим $\operatorname{Arth} iz = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1+iz}{1-iz}$. Сравнивая это равенство с формулой (4), проверяем справедливость формулы (12).

Заменяя в формуле (9) z через iz, получим $\operatorname{Arcth} iz = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{iz+1}{iz-1}$. Сравнивая это равенство с формулой (5), проверяем справедливость формулы (13).

Упражнения

1. Найти $\ln(3+4i)$, $\operatorname{Ln}(3+4i)$ и $\operatorname{Ln}(-3+4i)$.

Отв. $\ln(3+4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$,

$$\operatorname{Ln}(3+4i) = \ln 5 + i\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$\operatorname{Ln}(-3+4i) = \ln 5 - i \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + (2k+1)\pi i.$$

Указание. Главное значение аргумента числа $-3+4i$ равно $\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

2. Найти: а) $\operatorname{Arccos}\sqrt{5}$; б) $\operatorname{Arctg}(2i)$; в) $\operatorname{Arth} i$; г) $\operatorname{Arch}(-1)$.

Отв. а) $-i(\ln\sqrt{5}-2)+2k\pi$; б) $\frac{\pi}{2}+i\frac{\ln 3}{2}+k\pi$; в) $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)i$; г) $(2k+1)\pi i$ $\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

3. Показать, что

$$\operatorname{Arth}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\ln x,$$

$$\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a},\quad \operatorname{Arch}\frac{x}{a}=\ln\frac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

7. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)

Зависимость между гиперболическими и тригонометрическими функциями можно установить без участия мнимой единицы с помощью специального угла, называемого *гиперболической амплитудой* или *гудерманианом*.

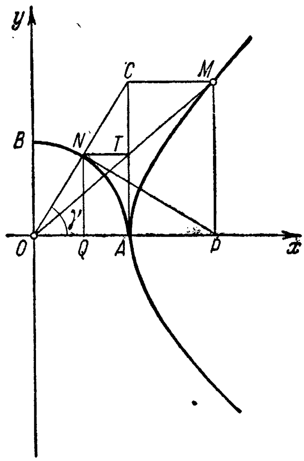

Рис. 12.

На равносторонней гиперболе $x^2-y^2=1$ (рис. 12) возьмем точку $M(x,\ y)$. Из начала координат, как из центра, радиусом, равным единице, опишем дугу AB окружности и в точке A проведем к ней касательную до пересечения в точке C с прямой MC, проведенной из точки M параллельно оси абсцисс. Начало координат O соединим с точкой C прямой, пересекающей окружность в точке $N(X,\ Y)$. Угол $NOA=\gamma$ называется гиперболической амплитудой или гудерманианом, соответствующим точке M гиперболы, а также аргументу t гиперболических функций $\operatorname{ch} t=x$ и $\operatorname{sh} t=y$. Границы его изменения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Если соединить точку N с основанием P перпендикуляра, опущенного из точки M на ось Ox, то получим треугольник ONP, в котором угол ONP прямой. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что $OP^2=ON^2+NP^2$. Для этого заметим, что из подобия треугольников OAC и OQN, где Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки N на ось Ox, следует, что $\frac{OA}{OQ}=\frac{AC}{QN}$, т. е. $\frac{1}{X}=\frac{y}{Y}$, откуда $y=\frac{Y}{X}$. Заменяя в уравнении гиперболы $x^2-y^2=1$, на которой лежит точка M, y через $\frac{Y}{X}$, получим $x^2-\frac{Y^2}{X^2}=1$, откуда $(xX)^2=X^2+Y^2$. Так как точка N лежит на окружности, то $X^2+Y^2=1$, и потому в первой четверти имеем соотношение $xX=1$.

Теперь можно проверить справедливость доказываемого равенства. Имеем $OP^2=x^2$, $ON^2=1$, $NP^2=(x-X)^2+Y^2=$ $=x^2-1$, ибо $xX=1$ и $X^2+Y^2=1$. Следовательно, $ON^2+NP^2=1+x^2-1=x^2=OP^2$, что и требовалось доказать.

Из прямоугольных треугольников OAC, ONP и OQN имеем соответственно:

$$\operatorname{sh} t=y=AC=OA\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\gamma \qquad (\text{ибо } AO=1),$$

$$\operatorname{ch} t=x=OP=ON\sec\gamma=\sec\gamma \qquad (\text{ибо } ON=1).$$

Кроме того,

$$\operatorname{th} t=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sec\gamma}=\sin\gamma,$$

$$\operatorname{cth} t=\frac{1}{\operatorname{th} t}=\frac{1}{\sin\gamma}=\operatorname{cosec}\gamma,$$

$$\operatorname{sch} t=\frac{1}{\operatorname{ch} t}=\frac{1}{\sec\gamma}=\cos\gamma,$$

$$\operatorname{csch} t=\frac{1}{\operatorname{sh} t}=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{ctg}\gamma.$$

Итак, мы получили соотношения:

$$\operatorname{sh} t=\operatorname{tg}\gamma, \tag{1}$$

$$\operatorname{ch} t=\sec\gamma, \tag{2}$$

$$\operatorname{th} t=\sin\gamma, \tag{3}$$

$$\operatorname{cth} t=\operatorname{cosec}\gamma, \tag{4}$$

$$\operatorname{sch} t=\cos\gamma, \tag{5}$$

$$\operatorname{csch} t=\operatorname{ctg}\gamma. \tag{6}$$

Для гиперболической амплитуды (гудерманиана) γ, соответствующей аргументу гиперболических функций t, применяются обозначения

$$\gamma = \operatorname{amph} t = \operatorname{gd} t.$$

Если известен гудерманиан γ, то легко найти аргумент t, и наоборот. Для этого воспользуемся формулой $e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$, в которой произведем замену $\operatorname{ch} t$ через $\sec\gamma$ и $\operatorname{sh} t$ через $\operatorname{tg}\gamma$; получим:

$$e^t = \sec\gamma + \operatorname{tg}\gamma = \frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$t = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}\right), \tag{7}$$

$$\gamma = \operatorname{gd} t = 2\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Можно получить еще одну зависимость между t и γ:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{th}\frac{t}{2}. \tag{9}$$

В самом деле, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{ch} t + 1}} = \operatorname{th}\frac{t}{2}$.

Из формулы (9) имеем:

$$\gamma = \operatorname{gd} t = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right). \tag{10}$$

Последнюю формулу удобно использовать для исследования функции $y = \operatorname{gd} x$ и построения ее графика. При $x = 0$ $y = 2\operatorname{arctg}(\operatorname{th} 0) = 0$. При $x \to +\infty$ функция $\operatorname{th}\frac{x}{2} \to 1$, а $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)\to\frac{\pi}{4}$, следовательно, $y\to\frac{\pi}{2}$. При $x\to-\infty$ $y\to-\frac{\pi}{2}$.

График функции $y=\operatorname{gd}x$ дан на рис. 13.

Понятие гудерманиана обобщается и на случай мнимого аргумента. При этом можно получить любопытное соотно-

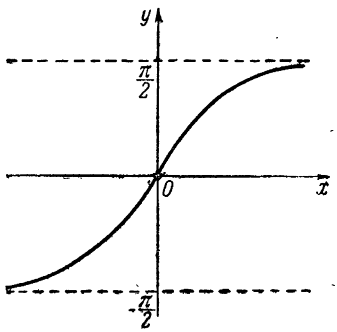

Рис. 13.

шение. Если $\gamma=\operatorname{gd}t$, то, как было показано, справедливо равенство $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{th}\frac{t}{2}$. Умножив обе его части на i, получим:

$$i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=i\operatorname{th}\frac{t}{2}.$$

Так как $i\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{th}\frac{i\gamma}{2}$, а $i\operatorname{th}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\frac{it}{2}$, то

$$\operatorname{th}\frac{i\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{it}{2},$$

откуда

$$it=\operatorname{gd}i\gamma.$$

Итак, если $\gamma=\operatorname{gd}t$, то

$$it=\operatorname{gd}i\gamma. \tag{11}$$

Можно ввести также функцию, обратную гудерманиану. Если $x=\operatorname{gd}y$, то y обозначается следующим образом: $y=\operatorname{arg}\operatorname{gd}x$.

8. Дифференцирование и интегрирование гиперболических и обратных гиперболических функций

Формулы дифференцирования гиперболических и обратных гиперболических функций можно свести в следующую таблицу:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \tag{1}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \tag{2}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \tag{3}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \tag{4}$$

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{5}$$

$$(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{6}$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \tag{7}$$

$$(\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}, \tag{8}$$

$$(\operatorname{gd} x)' = \operatorname{sch} x, \tag{9}$$

$$(\operatorname{arg\,gd} x)' = \sec x. \tag{10}$$

Первые четыре формулы выводятся следующим образом. По определению, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Поэтому $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$. Аналогично $(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.

Так как $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, то $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Аналогично $(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Следующие четыре формулы можно вывести с помощью правила дифференцирования обратной функции: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$. Если $y = \operatorname{Arsh} x$, то $x = \operatorname{sh} y$. Дифференцируя по y, получим

$x'_y = \operatorname{ch} y$. Поэтому $y'_x = (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, так как $\operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$.

Если $y = \operatorname{Arch} x$, то $x = \operatorname{ch} y$ и $x'_y = \operatorname{sh} y$, откуда

$$y'_x = (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Если $y = \operatorname{Arth} x$, то $x = \operatorname{th} y$ и $x'_y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}$, откуда

$$y'_x = (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{x'_y} = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{\operatorname{sch}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Если $y = \operatorname{Arcth} x$, то $x = \operatorname{cth} y$ и $x'_y = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}$, откуда

$$y'_x = (\operatorname{Arcth} x)' = \frac{1}{x'_y} = -\operatorname{sh}^2 y =$$
$$= -\frac{1}{\operatorname{csch}^2 y} = -\frac{1}{\operatorname{cth}^2 y - 1} = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Формулы (9) и (10) получаются следующим образом. Как известно, $y = \operatorname{gd} x = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2}$ (см. формулу (8) предыдущего пункта). Поэтому $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{sch} x$.

Из определения функции, обратной гудерманиану, и из формулы (7) п. 7 следует, что $y = \operatorname{arg\,gd} x = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. Поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Произведя обращение таблицы производных, получим таблицу интегралов:

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C, \tag{11}$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C = \\ = \begin{cases} \operatorname{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{a}}+C & \text{при } a>0, \\ \operatorname{Arch}\dfrac{x}{\sqrt{-a}}+C & \text{при } a<0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C = \\ = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\operatorname{Arth}\dfrac{x}{a}+C & \text{при } |x|<a, \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{Arcth}\dfrac{x}{a}+C & \text{при } |x|>a, \end{cases} \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{gd} x + C = 2\operatorname{arctg} e^x + C, \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{arg\,gd} x + C = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C. \tag{18}$$

Приведенную таблицу интегралов можно продолжить. Применяя обычные методы интегрирования функций с учетом соотношений между гиперболическими функциями, можно получить еще ряд формул, которые мы даем ниже без доказательства (см. Приложения, таблица 7, стр. 192).

Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла от рациональной функции гиперболического синуса и гиперболического косинуса. В курсе интегрального исчисления доказывается, что интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — символ рациональной функции, всегда берется в конечном виде при помощи универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$. Совершенно аналогично можно вычислить интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ с помощью подстановки $\operatorname{th}\frac{x}{2}=z$.

Положив $\operatorname{th}\frac{x}{2}=z$, мы получим $x=2\operatorname{Arth} z$, откуда

$$dx = \frac{2\,dz}{1-z^2}.$$

В свою очередь

$$\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} =$$

$$= 2\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{sch}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1-z^2},$$

а

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \operatorname{ch}^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Подставляя полученные выражения $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и dx через z в подынтегральное выражение, будем иметь:

$$\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{2z}{1-z^2},\ \frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\frac{2dz}{1-z^2} = \int R_1(z)\,dz,$$

где R_1 — символ рациональной функции от z. Так как интеграл от алгебраической рациональной функции всегда может быть выражен с помощью конечного числа элементарных функций, то и наш интеграл может быть выражен через элементарные функции от z, после чего остается произвести обратную замену z через $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

Пример.

$$\int\frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2} = \int\frac{\frac{2dz}{1-z^2}}{\left(1+\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int(1-z^2)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z-\frac{z^3}{3}\right)+C = \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2} + C.$$

Упражнения

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{\ln(1+x)}$. *Отв.* 1.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x+1)}{a+bx}$. *Отв.* $\dfrac{1}{b}$.

3. $\lim \dfrac{\operatorname{ch}\alpha x-\operatorname{ch}\beta x+\operatorname{sh}\alpha x-\operatorname{sh}\beta x}{\sin\alpha x-\cos\beta x}$. *Отв.* 1.

4. Дано $Q_n(x)=\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^2}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^3}\ldots\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^n}$; вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x)$. *Отв.* $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

Указание. Умножим обе части равенства на $\operatorname{sh}\dfrac{x}{2^n}$. Так как

$$\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2^{n-1}},\qquad \frac{1}{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2^{n-1}}\operatorname{ch}\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^2}\operatorname{sh}\frac{x}{2^{n-2}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\frac{1}{2^n}\operatorname{sh} x,$$

то

$$Q_n(x)\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{sh} x,\qquad\text{а}\qquad Q_n(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{2^n\operatorname{sh}\dfrac{x}{2^n}}.$$

5. Две бесконечные числовые последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

первые члены которых — данные положительные числа a_0 и b_0, причем $a_0>b_0$, задаются следующими законами образования:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2};\qquad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}.$$

Найти пределы, к которым стремятся общие члены последовательностей a_n и b_n при $n\to\infty$.

Отв. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{b_0\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}$, где $a_0=b_0\operatorname{ch}\alpha$ $(\alpha>0)$.

Указание. Положим $a_0 = b_0 \operatorname{ch} \alpha$ $(\alpha > 0)$. Тогда $a_1 = b_0 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2}$, $b_1 = b_0 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}$, а значит, $a_1 = b_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$b_2 = b_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^2},$$

$$b_3 = b_2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^3},$$

. . . .

$b_n = b_{n-1} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^n} = b_0 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^2} \ldots \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^n} = \dfrac{b_0 \operatorname{sh} \alpha}{2^n \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2^n}}$ (см. указание к задаче 4), $a_n = b_n \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^n}$.

Примечание. Если $a_0 < b_0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = \dfrac{b_0 \sin \alpha}{\alpha}$, где $a_0 = b_0 \cos \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Доказать!

Преобразовать дифференциальные уравнения посредством указанной замены переменных:

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y}{4 \operatorname{ch}^2 x}$; $x = \ln \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Отв. $t(1-t^2) \dfrac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2) \dfrac{dy}{dt} = ty$.

7. $(1-x^2)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2) \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2ay}{1-x} = 0$; $x = \operatorname{th} t$.

Отв. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a(e^{2t}+1)y = 0$.

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2 \operatorname{th} 2x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{n^2y}{\operatorname{ch}^2 2x} = 0$; $x = \ln \sqrt{\operatorname{tg} 2t}$.

Отв. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0$.

9. $(1-x^2)^2 \left(2a - \dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = by$; $x = \operatorname{th} \xi$, $y = \dfrac{a\eta}{\operatorname{ch} \xi}$; принять ξ за новый аргумент, а η за новую функцию.

Отв. $\dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(\dfrac{b}{a} - 1\right)\eta = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^3 \xi}$.

Указание. Продифференцировать x и y по ξ, найти $\frac{dy}{dx}$ как функцию ξ и η и продифференцировать ее по x как сложную функцию с промежуточным аргументом ξ.

10. Дано $x = r\,\mathrm{ch}\,\theta$, $y = r\,\mathrm{sh}\,\theta$. Доказать, что при такой замене переменных

$$\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Вычислить интегралы:

11. $\int \frac{\mathrm{th}^5 x}{\mathrm{sch}^4 x}\,dx.$ *Отв.* $\frac{1}{4\,\mathrm{sch}^4 x} - \frac{1}{\mathrm{sch}^2 x} - \ln \mathrm{sch}\, x + C.$

12. $\int \frac{dx}{1 - \mathrm{sh}^4 x}.$ *Отв.* $\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\, x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{\sqrt{2} + \mathrm{cth}\, x}{\sqrt{2} - \mathrm{cth}\, x} + C.$

13. $\int \frac{\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}^3 x + \mathrm{sh}^3 x}\,dx.$

Отв. $\frac{1}{3(1 + \mathrm{th}\, x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, \frac{2\,\mathrm{th}\, x - 1}{\sqrt{3}} + C.$

14. $\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}}\,dx.$ *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\, x + \sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}) + C.$

Указание. Этот интеграл берется с помощью подстановки $\mathrm{sh}\, x = y$:

$$\int \frac{\mathrm{ch}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}\, x\, dx}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x}} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{ch}\, x\, dx}{\sqrt{1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1 + 2y^2}}.$$

15. $\int x\, \mathrm{cth}^2 x\, dx.$ *Отв.* $-x\, \mathrm{cth}\, x + \ln \mathrm{sh}\, x + \frac{x^2}{2} + C.$

16. $\int \frac{x + \mathrm{sh}\, x + \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x}\,dx.$

Отв. $(x - 1)(\mathrm{sh}\, x + \mathrm{ch}\, x) + \frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, 2x + \mathrm{ch}\, 2x) + C.$

17. $\int \frac{dx}{e^{2x}\,\mathrm{ch}^4 x}.$ *Отв.* $-\frac{1}{3e^{2x}\,\mathrm{ch}^3 x} + C.$

18. $\int \frac{e^x}{1 - \mathrm{ch}\, x}\,dx.$ *Отв.* $\frac{1 + \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} - x - \ln (1 - \mathrm{ch}\, x) + C.$

Указание. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int \frac{e^x\,dx}{1-\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{1-\operatorname{ch} x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{(1-\operatorname{ch} x) - 1 - \operatorname{sh} x}{1-\operatorname{ch} x}\,dx = -\int dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{1-\operatorname{ch} x} + \int \frac{\operatorname{sh} x\,dx}{1-\operatorname{ch} x}.$$

19. $\int \arcsin(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x\,dx$.

Отв. $\operatorname{sh} x \arcsin(\operatorname{sh} x) + \sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x} + C$.

20. $\int \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)\operatorname{sh} x\,dx$. *Отв.* $\operatorname{ch} x \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - x + C$.

Указание. Интеграл берется по формуле интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Положим $u = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$, $dv = \operatorname{sh} x\,dx$. Тогда $du = \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$, $v = \operatorname{ch} x$.

9. Разложение гиперболических функций в степенные ряды и в тригонометрические ряды Фурье

Возьмем разложение показательной функции e^x в ряд по степеням x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Этот ряд абсолютно сходится при всех значениях x.

Если в этом тождестве заменить x на $-x$, то получим разложение функции e^{-x}

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Полусумма и полуразность функций e^x и e^{-x} дают разложения в степенные ряды гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \quad (1)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad (2)$$

которые также абсолютно сходятся при всех x.

Ниже приводятся разложения некоторых других функций с последующим выводом:

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} - \ldots$$
$$\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n}\,{}^{*)}\, x^{2n-1} + \ldots$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (3)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n}\,{}^{*)}\, x^{2n-1} + \ldots$$
$$(-\pi < x < \pi, \quad x \neq 0), \qquad (4)$$

$$\operatorname{sch} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \ldots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15\,120} + \ldots$$
$$(-\pi < x < \pi, \quad x \neq 0), \qquad (6)$$

$$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)\, x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2n(2n+1)} + \ldots$$
$$(-1 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (7)$$

$$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$
$$(-1 < x < 1), \qquad (8)$$

$$\operatorname{gd} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \ldots, \qquad (9)$$

$$\operatorname{arggd} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \frac{61x^7}{5040} + \ldots$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right). \qquad (10)$$

Для получения рядов для $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ найдем сначала разложение вспомогательной функции $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ в ряд по

*) B_n — числа Бернулли (см. ниже, стр. 60).

степеням x, приняв $f(0)=1$. Пусть

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n+\ldots, \tag{11}$$

где B_0, B_1, B_2, ... — коэффициенты, подлежащие определению. Они называются *числами Бернулли.*

Так как, с другой стороны,

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)!}+\ldots},$$

то имеем тождество

$$\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)!}+\ldots\right)\equiv 1,$$

откуда путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных B_0, B_1, B_2, ... Сравнивая свободные члены, найдем $B_0=1$. Приравнивая нулю коэффициент при x^{n-1}, получим общий вид n-го уравнения системы:

$$\frac{1}{n!}B_0+\frac{1}{(n-1)!}\frac{B_1}{1!}+\frac{1}{(n-2)!}\frac{B_2}{2!}+\ldots+\frac{1}{1!}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}=0,$$

или

$$1+\frac{n}{1!}B_1+\frac{n(n-1)}{2!}B_2+\ldots+\frac{n!}{(n-1)!}B_{n-1}=0$$
$$(n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{12}$$

Покажем, что все числа B_n с нечетными индексами, кроме B_1, равны нулю.

Заменив в равенстве (11) x на $-x$, будем иметь:

$$-\frac{x}{e^{-x}-1}=B_0-\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2-\frac{B_3}{3!}x^3+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{B_n}{n!}x^n+\ldots$$

Путем вычитания получим:

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{e^{-x}-1}=\frac{2B_1}{1!}x+\frac{2B_3}{3!}x^3+\ldots+\frac{2B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{e^{-x}-1}=\frac{x}{e^x-1}+\frac{xe^x}{1-e^x}=\frac{x(1-e^x)}{e^x-1}=-x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правых частях двух последних равенств, получим:

$$2B_1=-1,$$

$$B_3=B_5=\ldots=B_{2k+1}=\ldots=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Левая часть равенства (12) напоминает разложение бинома Ньютона, и потому оно может быть записано в символической форме в виде

$$(1+B)^n-B^n=0.$$

Эта формула в раскрытом виде дает равенство (12), если показатели степени B заменить соответствующими индексами.

Пользуясь формулой (12) можно найти числа B_n, принимая последовательно $n=2,\ 3,\ \ldots$ Приводим значения нескольких первых чисел B_n (напомним, что $B_0=1$):

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,$$

$$B_6=\frac{1}{42},\quad B_7=0,\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_9=0,\quad B_{10}=\frac{5}{66},$$

$$B_{11}=0,\quad B_{12}=-\frac{691}{2730},\quad B_{13}=0,\quad B_{14}=\frac{7}{6}\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, разложение функции $\frac{x}{e^x-1}$ имеет вид:

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_4}{4!}x^4+\ldots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$$

Так как $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}=\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}$, то, заменив в последнем равенстве $x/2$ на x, будем иметь:

$$x \operatorname{cth} x = 1 + \frac{2^2 B_2}{2!} x^2 + \frac{2^4 B_4}{4!} x^4 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

откуда

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} =$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots \quad (|x| < \pi, \quad x \neq 0).$$

Для получения разложения $\operatorname{th} x$ воспользуемся формулой (20) из п. 2 этой главы:

$$\operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x},$$

которую преобразуем к виду

$$2 \operatorname{cth} 2x = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{th} x = 2 \operatorname{cth} 2x - \operatorname{cth} x$$

или, используя разложение $\operatorname{cth} x$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} (2x)^{2n-1} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Для получения разложения $\operatorname{csch} x$ представим его предварительно в таком виде:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} - \operatorname{th} \frac{x}{2}\right).$$

Воспользуемся теперь разложениями $\operatorname{cth} x$ и $\operatorname{th} x$. Получим:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots \quad (|x| < \pi).$$

Разложение $\operatorname{sch} x$ получим способом неопределенных коэффициентов.

Пусть

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots} =$$

$$= E_0 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \ldots + \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

где коэффициенты E_0, E_2, E_4, ... подлежат определению. Выпишем тождество

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) \times$$

$$\times \left(E_0 + \frac{E_2}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \ldots + \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots\right) \equiv 1$$

и путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных $E_0, E_2, E_4, \ldots$ Сравнивая свободные члены, получим $E_0 = 1$. Приравнивая нулю коэффициенты при x^{2n}, получим:

$$\frac{1}{(2n)!}E_0 + \frac{1}{(2n-2)!}\frac{E_2}{2!} + \frac{1}{(2n-4)!}\frac{E_4}{4!} + \ldots + \frac{1}{0!}\frac{E_{2n}}{(2n)!} = 0.$$

Умножим обе части полученного равенства на $2(2n)!$ и одновременно заменим E_0 единицей; будем иметь:

$$1+\frac{2n(2n-1)}{2!}E_2+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}E_4+\ldots$$
$$\ldots+E_{2n}=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что левая часть равенства (13) напоминает разложение бинома Ньютона и может быть записана в символической форме:

$$(1+E)^{2n}+(-1+E)^{2n}=0.$$

Эта формула в раскрытом виде дает равенство (13), если показатели степени E заменить соответствующими индексами.

Принимая последовательно $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ находим несколько первых чисел E_{2n} (напомним, что $E_0=1$):

$$E_2=-1,\quad E_4=5,\quad E_6=-61,\quad E_8=1385 \text{ и т. д.}$$

Числа E_{2n} называются *эйлеровыми числами*. Очевидно, все эйлеровы числа с нечетными индексами равны нулю.

Итак,

$$\operatorname{sch} x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=$$
$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}-\frac{61x^6}{720}+\ldots \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

Разложение в ряд $\operatorname{Arsh} x$ можно получить путем интегрирования.

Имеем:

$$\operatorname{Arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=$$
$$=\int_0^x\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots\right)dx=$$
$$=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5}-\frac{1\cdot3\cdot5x^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\,x^{2n+1}}{2\cdot4\cdot6\ldots2n\,(2n+1)}+\ldots \quad (|x|\leqslant1)$$

($n=1, 2, 3, \ldots$, причем $n=1$ соответствует второму члену ряда). Аналогично получим:

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^x \frac{dx}{1+x} + \int_0^x \frac{dx}{1-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^x (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)\, dx =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (|x| < 1).$$

Ряды для функций $\operatorname{gd} x$ и $\operatorname{arg} \operatorname{gd} x$ приведены без вывода.

Из теории рядов Фурье известны разложения показательных функций e^x и e^{-x} в тригонометрические ряды Фурье на промежутке $(-\pi, \pi)$:

$$e^x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - n \sin nx}{1+n^2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

$$e^{-x} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx + n \sin nx}{1+n^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Беря полусумму и полуразность этих рядов, получим разложения в ряды Фурье гиперболических функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{1+n^2} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{1+n^2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Приведем без доказательства еще некоторые разложения гиперболических функций в тригонометрические ряды Фурье:

$$\operatorname{sh} ax = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (-\pi<x<\pi),$$

$$\operatorname{ch} ax = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right] \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

$$\operatorname{sh} a(\pi-x) = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (0<x<2\pi),$$

$$\operatorname{ch} a(\pi-x) = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right) \qquad (0<x<2\pi),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{1+n^2}\right]$$

($0<x<\pi$, неполный ряд по косинусам),

$$\operatorname{ch} x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}\,n\sin nx$$

($0<x<\pi$, неполный ряд по синусам).

Упражнения

Проверить справедливость следующих разложений:

1. $\operatorname{th} x = 1-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{4x}}-\frac{2}{e^{6x}}+\dots$

2. $\operatorname{cth} x = 1+\frac{2}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{4x}}+\frac{2}{e^{6x}}+\dots$

3. $\operatorname{Arsh} x = \ln(2x)+\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}+$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}-\dots \qquad (x>1),$$

$$\operatorname{Arsh} x = -\ln|2x| - \frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \ldots \qquad (x < -1).$$

4. $$\operatorname{Arch} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right] \qquad (x > 1).$$

5. $$\operatorname{Arsch} x = \pm\left(\ln\frac{2}{x} - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots\right) \qquad (0 < x < 1).$$

6. $$\operatorname{Arcsch} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots \qquad (|x| > 1),$$

$$\operatorname{Arcsch} x = \ln\frac{2}{x} + \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots \qquad (0 < x < 1),$$

$$\operatorname{Arcsch} x = -\ln\left|\frac{2}{x}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 + \ldots \qquad (-1 < x < 0).$$

ГЛАВА II

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ

10. Интегрирование функций (гиперболические подстановки)

Как известно из курса интегрального исчисления, интеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R — символ рациональной функции, может быть вычислен с помощью так называемых тригонометрических подстановок, т. е. путем замены аргумента x тригонометрической функцией новой переменной t. Однако тригонометрические подстановки иногда приводят к громоздким выкладкам, особенно тогда, когда вводится секанс или косеканс. В этом случае можно при интегрировании функций вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ применять гиперболические подстановки. Ниже дается изложение этого способа.

Преобразуем сначала подкоренное выражение путем дополнения квадратичного трехчлена до полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left(y^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right),$$

где положено $x+\frac{b}{2a}=y$.

Если $a > 0$, то, обозначив $\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm h^2$ и заметив, что $dx = dy$, приведем наш интеграл к виду:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \\ = \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 \pm h^2}\right) dy.$$

Если $a < 0$, то запишем $ax^2 + bx + c = -a\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2} - y^2\right)$ и обозначим $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = h^2$ (знак минус перед h^2 невозможен при условии вещественности корня $\sqrt{ax^2+bx+c}$). Тогда

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \\ = \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}\sqrt{h^2-y^2}\right) dy.$$

Итак, наш интеграл приводится к одному из следующих трех типов:

$$I_1 = \int R_1\left(y, \sqrt{y^2+h^2}\right) dy,$$

$$I_2 = \int R_1\left(y, \sqrt{y^2-h^2}\right) dy,$$

$$I_3 = \int R_1\left(y, \sqrt{h^2-y^2}\right) dy,$$

где R_1 — символ рациональной функции.

Интеграл I_1 подстановкой $y = h \operatorname{sh} t$ преобразуется к виду

$$I_1 = \int R_1(h \operatorname{sh} t, h \operatorname{ch} t) h \operatorname{ch} t \, dt = \int R_2(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t) \, dt$$

и берется в конечном виде как интеграл рациональной функции от гиперболических синуса и косинуса (см. гл. I, п. 8).

Аналогичные результаты получаем для интегралов I_2 и I_3, введя соответственно подстановки $y = h \operatorname{ch} t$ и $y = h \operatorname{th} t$, имеем:

$$I_2=\int R_1\left(y,\sqrt{y^2-h^2}\right)dy=\int R_1(h\operatorname{ch}t,\ h\operatorname{sh}t)\,h\operatorname{sh}t\,dt=$$
$$=\int R_2(\operatorname{sh}t,\ \operatorname{ch}t)\,dt,$$
$$I_3=\int R_1\left(y,\sqrt{h^2-y^2}\right)dy=\int R_1(h\operatorname{th}t,\ h\operatorname{sch}t)\frac{h\,dt}{\operatorname{ch}^2t}=$$
$$=\int R_2(\operatorname{sh}t,\ \operatorname{ch}t)\,dt.$$

Пример 1. Вычислить $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$. Положим $x=a\operatorname{sh}t$; тогда $dx=a\operatorname{ch}t\,dt$ и

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=a^2\int\operatorname{ch}^2t\,dt=a^2\int\frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}\,dt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}2t}{2}+t\right)+C=\frac{a^2}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+\frac{a^2}{2}t+C=$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}+C.$$

Пример 2. Вычислить $\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$. Положим $x=\operatorname{ch}t$; тогда $dx=\operatorname{sh}t\,dt$ и

$$\int\sqrt{(x^2-1)^3}\,dx=\int\operatorname{sh}^4t\,dt=\int\left(\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}\right)^2dt=$$
$$=\frac{1}{4}\int\operatorname{ch}^2 2t\,dt-\frac{1}{2}\int\operatorname{ch}2t\,dt+\frac{1}{4}\int dt=$$
$$=\frac{1}{8}\int(\operatorname{ch}4t+1)\,dt-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{1}{4}t=$$
$$=\frac{1}{32}\operatorname{sh}4t-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2t+\frac{3}{8}t+C.$$

Если принять во внимание равенства

$$\operatorname{sh}4t=2\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2t=4\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t(\operatorname{ch}^2t+\operatorname{sh}^2t)=$$
$$=4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1),$$
$$\operatorname{sh}2t=2x\sqrt{x^2-1},$$
$$t=\operatorname{Arch}t=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

то можно записать:

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

Упражнения

Вычислить с помощью гиперболических подстановок следующие интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$, подстановка $x=2\operatorname{sh}t$.

2. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{3}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-3})+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}+C$, подстановка $x=\sqrt{3}\operatorname{ch}t$.

3. $\int \sqrt{x^2+4x+13}\,dx = \frac{9}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right)+$
$+\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+13}+C$, подстановка $x+2=3\operatorname{sh}t$.

4. $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}-$
$-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C,$
подстановка $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t$.

11. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений

Гиперболические функции находят применение при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений. Не говоря о том, что в процессе интегрирования уравнений можно получить квадратуры, которые сравнительно легко вычисляются при помощи гиперболических подстановок, решения многих дифференциальных уравнений, в частности линейных, удобно выражать через гиперболические функции. При этом значительно сокращаются выкладки и сами решения получаются в более компактной форме. Кроме того, гиперболические подстановки позволяют иногда упростить дифференциальные уравнения, сводя их к легко интегрируемым видам.

Рассмотрим несколько примеров на отыскание решений дифференциальных уравнений, в первую очередь линейных однородных и неоднородных уравнений 2-го и 4-го порядков с постоянными коэффициентами, наиболее часто встречающихся на практике.

Пример 1. $y''-a^2y=0$. Это однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $r^2-a^2=0$ имеет корни $r_1=a$ и $r_2=-a$. Поэтому частными решениями будут показательные функции e^{ax} и e^{-ax}, а также их линейные комбинации. Примем в качестве частных решений полусумму и полуразность показательных функций $y_1=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=\operatorname{ch} ax$ и $y_2=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}=\operatorname{sh} ax$. Легко убедиться в линейной независимости этих частных решений. Для этого составим и вычислим определитель Вронского:

$$W[y]=\begin{vmatrix} \operatorname{ch} ax & \operatorname{sh} ax \\ a\operatorname{sh} ax & a\operatorname{ch} ax \end{vmatrix}=a(\operatorname{ch}^2 ax-\operatorname{sh}^2 ax)=a\neq 0.$$

Так как $W[y]\neq 0$, то наши частные решения образуют фундаментальную систему и общее решение запишется в виде

$$y=C_1\operatorname{ch} ax+C_2\operatorname{sh} ax.$$

Если задать начальные условия $y=1$ и $y'=0$ при $x=0$, то, подставив сначала значения x и y в общее решение, получим $C_1=1$, а вычислив производную $y'=aC_1\operatorname{sh} ax+ +aC_2\operatorname{ch} ax$ и подставив в нее значения x и y', получим $C_2=0$, и таким образом частное решение выражается через гиперболический косинус $y=\operatorname{ch} ax$.

Если изменить начальные условия, задав $y=0$ и $y'=1$ при $x=0$, то в качестве частного решения получим гиперболический синус $y=\operatorname{sh} ax$.

Пример 2. $y''-a^2y=f(x)$. Это неоднородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Для отыскания его общего решения применим метод вариации постоянных. С этой целью возьмем общее решение соответствующего однородного уравнения (пример 1)

$y = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \operatorname{sh} ax$ и, полагая $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, подберем эти функции таким образом, чтобы функция

$$y = C_1(x) \operatorname{ch} ax + C_2(x) \operatorname{sh} ax$$

удовлетворяла нашему неоднородному уравнению. Поскольку мы варьируем обе произвольные постоянные, а накладываем только одно это условие, то мы вправе ввести еще одно условие, например, потребовать, чтобы выражение первой производной, вычисленное при переменных $C_1(x)$ и $C_2(x)$, имело такой же вид, как и при постоянных C_1 и C_2. Так как $y' = aC_1(x) \operatorname{sh} ax + aC_2(x) \operatorname{ch} ax + C_1'(x) \operatorname{ch} ax + C_2'(x) \operatorname{sh} ax$, то это условие сводится к следующему уравнению относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) \operatorname{ch} ax + C_2'(x) \operatorname{sh} ax = 0$$

и, таким образом,

$$y' = aC_1(x) \operatorname{sh} ax + aC_2(x) \operatorname{ch} ax.$$

Вычислим вторую производную; имеем:

$$y'' = a^2C_1(x) \operatorname{ch} ax + a^2C_2(x) \operatorname{sh} ax + \\ + aC_1'(x) \operatorname{sh} ax + aC_2'(x) \operatorname{ch} ax.$$

Выражения функции y и производной y'' через x подставим в исходное уравнение. После несложных алгебраических преобразований получим:

$$C_2'(x) \operatorname{sh} ax + C_2'(x) \operatorname{ch} ax = \frac{f(x)}{a}.$$

Итак, мы имеем систему из двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) \operatorname{ch} ax + C_2'(x) \operatorname{sh} ax = 0,$$
$$C_1'(x) \operatorname{sh} ax + C_2'(x) \operatorname{ch} ax = \frac{f(x)}{a}.$$

Система совместна и имеет единственное решение, так как определитель системы Δ отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} ax & \operatorname{sh} ax \\ \operatorname{sh} ax & \operatorname{ch} ax \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 ax - \operatorname{sh}^2 ax = 1 \neq 0.$$

Решая эту систему, получим выражения производных искомых произвольных «постоянных»:

$$C_1'(x)=\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh} ax \\ \frac{f(x)}{a} & \operatorname{ch} ax \end{vmatrix}=-\frac{1}{a}f(x)\operatorname{sh} ax,$$

$$C_2'(x)=\begin{vmatrix} \operatorname{ch} ax & 0 \\ \operatorname{sh} ax & \frac{f(x)}{a} \end{vmatrix}=\frac{1}{a}f(x)\operatorname{ch} ax,$$

а с помощью квадратур запишем и самые произвольные «постоянные»:

$$C_1(x)=-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\operatorname{sh} at\,dt+\bar{C}_1,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\operatorname{ch} at\,dt+\bar{C}_2.$$

Здесь x_0 — любая постоянная, $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — новые произвольные постоянные (без кавычек), а переменная интегрирования во избежание путаницы в дальнейшем обозначается через t.

Подставив выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в функцию $y=C_1(x)\operatorname{ch} ax+C_2(x)\operatorname{sh} ax$, получим общее решение неоднородного уравнения $y''-a^2y=f(x)$ в виде

$$y=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)(\operatorname{sh} ax\operatorname{ch} at-\operatorname{ch} ax\operatorname{sh} at)\,dt+\bar{C}_1\operatorname{ch} ax+\bar{C}_2\operatorname{sh} ax,$$

или в окончательной компактной форме

$$y=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\operatorname{sh} a(x-t)\,dt+\bar{C}_1\operatorname{ch} ax+\bar{C}_2\operatorname{sh} ax.$$

Легко заметить, что сумма последних двух членов полностью соответствует общему решению однородного уравнения $y''-a^2y=0$; что же касается первого члена, то он представляет собой частное решение неоднородного уравнения, которое в сумме с общим решением однородного уравнения составляет, согласно теории линейных уравнений, общее решение неоднородного уравнения. Так, если дано, в частности, $f(x)=\frac{A}{\operatorname{sh} ax}$, где $A=\mathrm{const}$, то частное решение этого конкретного неоднородного уравнения будет ($x_0>0$)

$$y_1=\frac{A}{a}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\operatorname{sh} a(x-t)}{\operatorname{sh} at}\,dt=\frac{A}{a}\int\limits_{x_0}^{x}(\operatorname{sh} ax \operatorname{cth} at-\operatorname{ch} ax)\,dt=$$

$$=\frac{A}{a}\left[\frac{1}{a}\operatorname{sh} ax \ln|\operatorname{sh} at|-t\operatorname{ch} ax\right]_{x_0}^{x}=$$

$$=\frac{A}{a^2}\operatorname{sh} ax \ln\left|\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} ax_0}\right|-\frac{A}{a}(x-x_0)\operatorname{ch} ax;$$

следовательно, общее решение имеет вид

$$y=\frac{A}{a^2}\operatorname{sh} ax \ln\left|\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} ax_0}\right|-\frac{A}{a}(x-x_0)\operatorname{ch} ax+$$
$$+C_1\operatorname{ch} ax+C_2\operatorname{sh} ax.$$

Пример 3. $y''+py'+qy=0$. Это однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет корни

$$r_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Рассмотрим только случай

$$\frac{p^2}{4}-q>0,$$

когда корни вещественные и разные.

Положим

$$\frac{p}{2}=\alpha,\quad \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\beta.$$

Тогда $r_{1,2}=-\alpha\pm\beta$ и частными решениями уравнения будут функции $e^{(-\alpha+\beta)x}$ и $e^{(-\alpha-\beta)x}$, а также их линейные комбинации. Примем в качестве частных решений полусумму и полуразность этих функций:

$$y_1=\frac{e^{-\alpha x}(e^{\beta x}+e^{-\beta x})}{2}=e^{-\alpha x}\operatorname{ch}\beta x$$

и

$$y_2=\frac{e^{-\alpha x}(e^{\beta x}-e^{-\beta x})}{2}=e^{-\alpha x}\operatorname{sh}\beta x.$$

Легко убедиться в том, что эти решения образуют фундаментальную систему, и, следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-\alpha x}(C_1 \operatorname{ch} \beta x + C_2 \operatorname{sh} \beta x).$$

Пример 4. $y'' + py' + qy = f(x)$. Это неоднородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение будем искать, как в примере 2, методом вариации постоянных, входящих в общее решение соответствующего однородного уравнения (см. пример 3), причем, как в примере 3, ограничимся случаем, когда $\beta^2 = \frac{p^2}{4} - q > 0$; имеем:

$$y = e^{-\alpha x}[C_1(x) \operatorname{ch} \beta x + C_2(x) \operatorname{sh} \beta x],$$

$$\begin{aligned} y' = -\alpha e^{-\alpha x}[C_1(x) \operatorname{ch} \beta x + C_2(x) \operatorname{sh} \beta x] + \\ + e^{-\alpha x}[\beta C_1(x) \operatorname{sh} \beta x + \beta C_2(x) \operatorname{ch} \beta x] + \\ + e^{-\alpha x}\left[C_1'(x) \operatorname{ch} \beta x + C_2'(x) \operatorname{sh} \beta x\right]. \end{aligned}$$

Как в примере 2, потребуем, чтобы выражение, стоящее в последних квадратных скобках, обратилось в нуль. Это дает нам первое уравнение относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) \operatorname{ch} \beta x + C_2'(x) \operatorname{sh} \beta x = 0.$$

Запишем первую производную в виде

$$y' = e^{-\alpha x}[(\beta \operatorname{sh} \beta x - \alpha \operatorname{ch} \beta x) C_1(x) + (\beta \operatorname{ch} \beta x - \alpha \operatorname{sh} \beta x) C_2(x)]$$

и вычислим вторую производную

$$\begin{aligned} y'' = -\alpha e^{-\alpha x}[(\beta \operatorname{sh} \beta x - \alpha \operatorname{ch} \beta x) C_1(x) + \\ + (\beta \operatorname{ch} \beta x - \alpha \operatorname{sh} \beta x) C_2(x)] + e^{-\alpha x}[(\beta^2 \operatorname{ch} \beta x - \alpha\beta \operatorname{sh} \beta x) C_1(x) + \\ + (\beta^2 \operatorname{sh} \beta x - \alpha\beta \operatorname{ch} \beta x) C_2(x)] + e^{-\alpha x}[(\beta \operatorname{sh} \beta x - \alpha \operatorname{ch} \beta x) C_1'(x) + \\ + (\beta \operatorname{ch} \beta x - \alpha \operatorname{sh} \beta x) C_2'(x)]. \end{aligned}$$

Теперь умножим y на q, y' на p и подставим эти произведения вместе с y'' в исходное уравнение; после приведения подобных членов получим:

$$e^{-\alpha x}\{[(q-p\alpha+\alpha^2+\beta^2)\operatorname{ch}\beta x+(p\beta-2\alpha\beta)\operatorname{sh}\beta x]\,C_1(x)+$$
$$+[(p\beta-2\alpha\beta)\operatorname{ch}\beta x+(q-p\alpha+\alpha^2+\beta^2)\operatorname{sh}\beta x]\,C_2(x)\}+$$
$$+e^{-\alpha x}[(\beta\operatorname{sh}\beta x-\alpha\operatorname{ch}\beta x)\,C_1'(x)+$$
$$+(\beta\operatorname{ch}\beta x-\alpha\operatorname{sh}\beta x)\,C_2'(x)]=f(x).$$

Так как $\alpha=\frac{p}{2}$, а $\beta=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, то выражение, стоящее в фигурных скобках, обращается в нуль, и мы приходим ко второму уравнению относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$(\beta\operatorname{sh}\beta x-\alpha\operatorname{ch}\beta x)\,C_1'(x)+(\beta\operatorname{ch}\beta x-\alpha\operatorname{sh}\beta x)\,C_2'(x)=e^{\alpha x}f(x),$$

которое вместе с первым уравнением образует систему из двух алгебраических линейных уравнений с неизвестными $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Составим определитель системы Δ и вычислим его:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}\beta x & \operatorname{sh}\beta x\\ \beta\operatorname{sh}\beta x-\alpha\operatorname{ch}\beta x & \beta\operatorname{ch}\beta x-\alpha\operatorname{sh}\beta x\end{vmatrix}=$$
$$=\beta\operatorname{ch}^2\beta x-\alpha\operatorname{ch}\beta x\operatorname{sh}\beta x-\beta\operatorname{sh}^2\beta x+\alpha\operatorname{sh}\beta x\operatorname{ch}\beta x=\beta\neq 0.$$

Следовательно, система совместна и имеет единственнох решение. Корни ее дают производные искомых произвольные «постоянных»

$$C_1'(x)=\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sh}\beta x\\ e^{\alpha x}f(x) & \beta\operatorname{ch}\beta x-\alpha\operatorname{sh}\beta x\end{vmatrix}=-\frac{1}{\beta}f(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sh}\beta x,$$

$$C_2'(x)=\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix}\operatorname{ch}\beta x & 0\\ \beta\operatorname{sh}\beta x-\alpha\operatorname{ch}\beta x & e^{\alpha x}f(x)\end{vmatrix}=\frac{1}{\beta}f(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{ch}\beta x.$$

С помощью квадратур запишем и сами произвольные «постоянные»:

$$C_1(x)=-\frac{1}{\beta}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,e^{\alpha t}\operatorname{sh}\beta t\,dt+\overline{C}_1,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{x_0}^{x}f(t)\,e^{\alpha t}\operatorname{ch}\,\beta t\,dt+\overline{C}_2.$$

Здесь, как в примере 2, x_0 — любая постоянная, $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — новые произвольные постоянные (без кавычек), а t — переменная интегрирования.

Подставляя функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение $y=e^{-\alpha x}[C_1(x)\operatorname{ch}\beta x+C_2(x)\operatorname{sh}\beta x]$, получим общее решение неоднородного уравнения $y''+py'+qy=f(x)$ в виде

$$y=\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\,e^{\alpha(t-x)}\operatorname{sh}\beta(x-t)\,dt+$$
$$+e^{-\alpha x}(\overline{C}_1\operatorname{ch}\beta x+\overline{C}_2\operatorname{sh}\beta x).$$

Как и в примере 2, первый член представляет частное решение y_1 неоднородного уравнения, а второй — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Заметим, не производя выкладок, что в случае $\frac{p^2}{4}-q<0$ частное решение

$$y_1=\frac{1}{\beta}\int_{x_0}^{x} f(t)\,e^{\frac{p}{2}(t-x)}\sin\beta(x-t)\,dt,$$

где $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, а в случае $\frac{p^2}{4}-q=0$ частное решение

$$y_1=\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)\,e^{\frac{p}{2}(t-x)}\,dt.$$

Пример 5. $y^{\mathrm{IV}}-a^4y=0$. Это однородное линейное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $r^4-a^4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm a$, $r_{3,4}=\pm ia$, где $i=\sqrt{-1}$. Общее решение $y=C_1^*e^{ax}+C_2^*e^{-ax}+C_3\cos ax+C_4\sin ax$. Если заменить e^{ax} через $\operatorname{ch}ax+\operatorname{sh}ax$, а e^{-ax} через $\operatorname{ch}ax-\operatorname{sh}ax$, то будем иметь: $y=C_1\operatorname{ch}ax+C_2\operatorname{sh}ax+C_3\cos ax+C_4\sin ax$, где положено $C_1^*+C_2^*=C_1$ и $C_1^*-C_2^*=C_2$.

Пример 6. $y^{\mathrm{IV}}+4a^4y=0$. Это тоже однородное линейное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $r^4+4a^4=0$. Для нахождения его корней разложим левую часть на множители следующим образом:

$$r^4+4a^4=(r^4+4a^2r^2+4a^4)-4a^2r^2=(r^2+2a^2)^2-4a^2r^2=$$
$$=(r^2-2ar+2a^2)(r^2+2ar+2a^2).$$

Приравнивая нулю выражения, стоящие в скобках, каждое в отдельности, получим два квадратных уравнения. Решая их, будем иметь корни характеристического уравнения $r_{1,2}=a\pm ai$, $r_{3,4}=-a\pm ai$. Поэтому общим решением будет функция

$$y=e^{ax}(C_1\cos ax+C_2\sin ax)+e^{-ax}(C_3\cos ax+C_4\sin ax).$$

Если, как и в предыдущем примере, произвести замену $e^{ax}=\operatorname{ch}ax+\operatorname{sh}ax$, $e^{-ax}=\operatorname{ch}ax-\operatorname{sh}ax$, то после несложных алгебраическах преобразований получим общее решение в виде

$$y=C_1^*\cos ax\operatorname{ch}ax+C_2^*\cos ax\operatorname{sh}ax+$$
$$+C_3^*\sin ax\operatorname{ch}ax+C_4^*\sin ax\operatorname{sh}ax,$$

где положено $C_1+C_3=C_1^*$, $C_1-C_3=C_2^*$, $C_2+C_4=C_3^*$, $C_2-C_4=C_4^*$.

Рассмотрим несколько примеров на нелинейные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков.

Пример 7. $ay'=\sqrt{1+y^2}$. Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим:

$$\frac{a\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=dx,$$

откуда, беря квадратуры, будем иметь общий интеграл

$$a\operatorname{Arsh}y=x+C$$

или общее решение

$$y=\operatorname{sh}\frac{x+C}{a}.$$

Если задать начальное условие $y=0$ при $x=0$, то, подставив в общее решение вместо x и y их значения, получим

$\operatorname{sh}\frac{C}{a}=0$, откуда следует, что произвольное постоянное C равно нулю, и потому частным решением уравнения будет гиперболический синус

$$y=\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Пример 8. $yy''=1+y'^2$. Это нелинейное уравнение 2-го порядка, которое подстановкой $y'=p$ и соответственно $y''=p\frac{dp}{dy}$ сводится к уравнению 1-го порядка $yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$. После разделения переменных получим $\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$, откуда, беря квадратуры, придем к уравнению $\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=\ln y-\ln C_1$, потенцируя которое, будем иметь $\sqrt{1+p^2}=\frac{y}{C_1}$ или $\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2-1}}=\pm\,dx$.

Взяв квадратуры, получим $C_1\operatorname{Arch}\frac{y}{C_1}=\pm(x+C_2)$, откуда $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1}$ (знак минус перед аргументом под знаком гиперболического косинуса опускаем, ибо косинус является четной функцией).

Пример 9. $y''=2yy'$. Это нелинейное уравнение 2-го порядка, которое, как и в предыдущем примере, подстановкой $y'=p$ сводится к уравнению 1-го порядка $p\frac{dp}{dy}=2yp$, откуда, сократив на p (полагаем $p\neq 0$, случай $p=0$ дает тривиальное решение $y=\text{const}$) и взяв квадратуру, получим $p=y^2+C_1^*$ или $\frac{dy}{dx}=y^2+C_1^*$. Разделив переменные, будем иметь

$$\frac{dy}{y^2+C_1^*}=dx.$$

При интегрировании левой части полученного уравнения могут представиться две возможности:

1) если принять $C_1^* > 0$ и положить $C_1^* = C_1^2$, то получим $\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2$ или $\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = C_1x + C_1C_2$, откуда $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1x + \overline{C}_2)$, где положено $C_1C_2 = \overline{C}_2$;

2) если принять $C_1^* < 0$ и положить $C_1^* = -C_1^2$, то получим $-\frac{1}{C_1}\operatorname{Arth}\frac{y}{C_1} = x + C_2$ или $\operatorname{Arth}\frac{y}{C_1} = -(C_1x + C_1C_2)$, откуда $y = -C_1 \operatorname{th}(C_1x + \overline{C}_2)$, где, как и выше, положено $C_1C_2 = \overline{C}_2$, причём предполагается, что $|y| < |C_1|$. В случае $|y| > |C_1|$ имеем $y = -C_1 \operatorname{Arcth}(C_1x + \overline{C}_2)$.

Во всех разобранных примерах гиперболические функции возникали в процессе интегрирования уравнений. Разберем несколько примеров на применение гиперболических подстановок для упрощения дифференциальных уравнений до их интегрирования.

Пример 10. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$. Положим $y' = \operatorname{sh} z$. Тогда уравнение преобразуется к виду $y = a \operatorname{ch} z$, откуда дифференцированием находим, что $y' = az' \operatorname{sh} z$ или, заменяя y' через $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{sh} z = az' \operatorname{sh} z$. Сокращая на $\operatorname{sh} z$, получим $z' = \frac{1}{a}$, откуда $z = \frac{x + C}{a}$, а следовательно, $y = a \operatorname{ch}\frac{x + C}{a}$.

Пример 11. $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$. Положим $y' = \operatorname{sh} z$. Тогда $y'' = z' \operatorname{ch} z$, и уравнение преобразуется к виду $az' = 1$, откуда $z = \frac{x + C_1}{a}$. Поэтому $y' = \operatorname{sh}\frac{x + C_1}{a}$, и окончательно

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x + C_1}{a} + C_2.$$

Пример 12. $y' = \frac{y}{x} + a\sqrt{x^2 + y^2}$. Положим $y = x \operatorname{sh} z$. Тогда $y' = xz' \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$ и уравнение принимает вид $xz' \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} z + ax \operatorname{ch} z$. После упрощения получим $z' = a$, откуда $z = ax + C$ и, следовательно, $y = x \operatorname{sh}(ax + C)$.

Пример 13. $y' = \frac{y}{x} + a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}$. Положим, как и в предыдущем примере, $y = x \operatorname{sh} z$. Вычислив y' и перейдя к переменным x и z, преобразуем уравнение к виду $z' = \frac{a}{x^2}$, откуда $z = -\frac{a}{x} - C$, и, следовательно, $y = -x\,\mathrm{sh}\left(\frac{a}{x} + C\right)$.

Рассмотрим более сложный пример на интегрирование дифференциального уравнения, содержащего гиперболические функции.

Пример 14. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\mathrm{th}\,2x\frac{dy}{dx} + \frac{n^2}{\mathrm{ch}^2 2x}y = 0$. Это линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами. Преобразуем его к более простому виду. Для этого подберем соответствующую функцию $\varphi(t)$ и произведем замену переменной, положив $x = \varphi(t)$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\frac{d^2x}{dt^2},$$

следовательно,

$$\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{dy}{dt}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - 2\,\mathrm{th}\,2x\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}} + \frac{n^2}{\mathrm{ch}^2 2x}y = 0.$$

Выберем функцию $x = \varphi(t)$ так, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, обратилось в нуль, т. е. потребуем, чтобы

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - 2\,\mathrm{th}\,2x = 0.$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка, так как в нем отсутствует аргумент t. Чтобы проинтегрировать его, положим $\frac{dx}{dt} = p$; тогда $\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dp}{dx}$, и уравнение примет вид

$$\frac{p\frac{dp}{dx}}{p^2} - 2\,\mathrm{th}\,2x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} - 2\,\mathrm{th}\,2x = 0.$$

Взяв квадратуры, получим:

$$\ln p - \ln \operatorname{ch} 2x = \ln 1, \qquad p = \operatorname{ch} 2x, \qquad \frac{dx}{\operatorname{ch} 2x} = dt$$

(здесь положено $C = 0 = \ln 1$, ибо нам достаточно иметь одну какую-нибудь функцию $x = \varphi(t)$). Взяв квадратуры в последнем уравнении, будем иметь:

$$t = \operatorname{arctg} e^{2x} \quad \text{или} \quad e^{2x} = \operatorname{tg} t.$$

Выбрав $\varphi(t) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} t$, мы преобразуем исходное уравнение к виду

$$\frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2x} + \frac{n^2}{\operatorname{ch}^2 2x} y = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$$

и окончательно

$$y = C_1 \cos (n \operatorname{arctg} e^{2x}) + C_2 \sin (n \operatorname{arctg} e^{2x}).$$

Рассмотрим пример на интегрирование дифференциального уравнения в частных производных.

Пример 15. Найти частное решение дифференциального уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\Phi(x, y)\Big|_{y=0} = a \cos (mx - nt),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{y=-h} = 0, \quad \text{где} \quad a, m, n, t \text{ — параметры.}$$

Решение. Используя первое граничное условие, будем искать частное решение в виде произведения

$$\Phi(x, y) = \cos (mx - nt) \, Y(y),$$

где $Y(y)$ — неизвестная функция, зависящая только от y и обращающаяся в a при $y = 0$: $Y(0) = a$.

Вычислив частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -m^2 \cos(mx - nt)\, Y(y),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \cos(mx - nt)\, Y''(y)$$

и подставив их в уравнение Лапласа, мы получаем тождество

$$\cos(mx - nt)\,[Y''(y) - m^2 Y(y)] \equiv 0,$$

откуда, так как $\cos(mx - nt) \neq 0$, имеем обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Y'' - m^2 Y = 0.$$

Его общее решение (см. пример 1) $Y(y) = C_1 \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my$.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего условию $Y(0) = a$, подставим в общее решение a вместо Y и 0 вместо y, что дает $C_1 = a$, и, следовательно, $Y(y) = a \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my$. Поэтому

$$\Phi(x, y) = \cos(mx - nt)\,(a \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my). \qquad (*)$$

Используем второе граничное условие. Найдем $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ и подставим 0 вместо $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ и $-h$ вместо y. Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = m \cos(mx - nt)\,(a \operatorname{sh} my + C_2 \operatorname{ch} my),$$

а после подстановки

$$m \cos(mx - nt)\,(-a \operatorname{sh} mh + C_2 \operatorname{ch} mh) = 0,$$

откуда, поскольку $\cos(mx - nt) \neq 0$,

$$-a \operatorname{sh} mh + C_2 \operatorname{ch} mh = 0.$$

Из этого уравнения находим отношение

$$\frac{C_2}{a} = \frac{\operatorname{sh} mh}{\operatorname{ch} mh}$$

и подставляем его в (*). Имеем:

$$\Phi(x, y) = a \cos(mx - nt)\left(\operatorname{ch} my + \frac{\operatorname{sh} mh}{\operatorname{ch} mh} \operatorname{sh} my\right)$$

или, заметив, что

$$\operatorname{ch} my \operatorname{ch} mh + \operatorname{sh} my \operatorname{sh} mh = \operatorname{ch}(y+h),$$

получим ответ:

$$\Phi(x, y) = c\cos(mx - nt)\operatorname{ch}(y+h),$$

где положено $\dfrac{a}{\operatorname{ch} mh} = c$.

Эта задача встречается в гидродинамике при отыскании потенциала скоростей волн в канале глубины h с вертикальными стенками.

Рассмотрим пример на решение функционального уравнения, т. е. уравнения, из которого требуется определить общий вид функции.

Пример 16. Найти такую дважды дифференцируемую функцию $\varphi(u)$, чтобы соотношение

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = \varphi^2(x) - \varphi^2(y)$$

оставалось справедливым для всех значений x и y.

Решение. Продифференцируем заданное равенство по x, а затем по y; получим:

$$\varphi'(x+y)\varphi(x-y) + \varphi'(x-y)\varphi(x+y) = 2\varphi(x)\varphi'(x),$$
$$\varphi''(x+y)\varphi(x-y) - \varphi''(x-y)\varphi(x+y) = 0.$$

Второе равенство перепишем так:

$$\frac{\varphi''(x+y)}{\varphi(x+y)} = \frac{\varphi''(x-y)}{\varphi(x-y)},$$

откуда заключаем, что функция $\dfrac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}$ не должна изменяться от замены $u = x+y$ на $u = x-y$. Так как $x+y$ и $x-y$ могут иметь любые значения и не зависят друг от друга, то

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = k,$$

где $k = \text{const}$.

Рассмотрим два случая.

1) $k = n^2$ $(k > 0)$. Получаем дифференциальное уравнение

$$\varphi''(u) - n^2\varphi(u) = 0.$$

Его общее решение (см. пример 1)

$$\varphi(u) = C_1 \operatorname{ch} nu + C_2 \operatorname{sh} nu.$$

Если в исходном равенстве положить $y = x$, то получим:

$$\varphi(2x)\varphi(0) = \varphi^2(x) - \varphi^2(x) = 0.$$

Так как $\varphi(2x) \neq 0$, то мы имеем условие $\varphi(0) = 0$, которое позволяет определить одну из произвольных постоянных. Для этого подставим значение $u = 0$ в общее решение; тогда

$$\varphi(0) = C_1 \operatorname{ch} 0 + C_2 \operatorname{sh} 0,$$

откуда $C_1 = 0$ и, следовательно, $\varphi(u) = C \operatorname{sh} nu$, где вместо C_2 взято C.

2) $k = -n^2$ $(k < 0)$. Получаем дифференциальное уравнение

$$\varphi''(u) + n^2\varphi(u) = 0.$$

Его общее решение $\varphi(u) = C_1 \cos nu + C_2 \sin nu$.

Дополнительное условие $\varphi(0) = 0$ приводит к соотношению $C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$, откуда $C_1 = 0$, и, следовательно, $\varphi(u) = C \cos nu$, где, как и в предыдущем случае, произведена замена C_2 на C.

В заключение рассмотрим одну геометрическую задачу.

Пример 17. Найти кривую, у которой величина отрезка, отсекаемого касательной в любой точке кривой на оси Oy, пропорциональна секансу угла φ, образованного радиус-вектором этой точки с осью Ox.

Решение. Величина отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy, равна $y - xy'$. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, то $\sec\varphi = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.

Составляем дифференциальное уравнение

$$y - xy' = a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

и преобразуем его к виду

$$y' = \frac{y}{x} - a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}.$$

Его общее решение (см. пример 13)

$$y = x \operatorname{sh}\left(\frac{a}{x} + C\right)$$

(знак минус в правой части отсутствует потому, что в нашем уравнении, в отличие от примера 13, коэффициент a входит со знаком минус, который можно вынести за знак гиперболического синуса как нечетной функции).

Упражнения

1. Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' + a^2y^2 - b^2 = 0$. *Отв.* $y = \frac{b}{a} \operatorname{th}(abx + C)$.

2) $y'(1 + \operatorname{sh} x) \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} x (\operatorname{ch} y - 1) = 0$.
Отв. $(\operatorname{sh} x + 1) \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x = C$.

3) $y'(x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x) + y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = 0$.
Отв. $y \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} y = C$.

2. Показать, что подстановкой $y = xu$ следующие уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными; проинтегрировать их:

1) $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2(1 - x^2) - x^4 = 0$.
Отв. $y = \pm x \operatorname{sh}(x + C)$.

2) $(y^4 + y^2x^2 - x^2) y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0$.
Отв. $x = \pm y \operatorname{sh}(y + C)$.

3. Решить однородные уравнения 1-го порядка:

1) $(x + \sqrt{x^2 + y^2}) y' = y$. *Отв.* $\operatorname{Arsh} \frac{x}{|y|} - \ln|y| = C$.

2) $xy' + a\sqrt{x^2 + y^2} - y = 0$. *Отв.* $y = x \operatorname{sh}\left(a \ln \frac{C}{x}\right)$.

3) $xy' \operatorname{ch} \frac{y}{x} + 2x \operatorname{sh} \frac{y}{x} - y \operatorname{ch} \frac{y}{x} = 0$. *Отв.* $x^2 \operatorname{sh} \frac{y}{x} = C$.

4. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (однородных и неоднородных):

1) $y'' + y' - \frac{y}{4} = 0$. *Отв.* $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

2) $y^{IV}-13y''+36y=0$.
Отв. $y=C_1\operatorname{ch}(2x+C_2)+C_3\operatorname{sh}(3x+C_4)$.

3) $y''+y=\operatorname{ch}x$. *Отв.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{\operatorname{ch}x}{2}$.

4) $y''-a^2y=b\operatorname{sh}ax$.
Отв. $y=C_1\operatorname{ch}ax+C_2\operatorname{sh}ax+\dfrac{b}{2a}x\operatorname{ch}ax$.

5) $y'''-2y''-a^2y'+2a^2y=\operatorname{sh}x$.
Отв. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{ax}+C_3e^{-ax}+$
$$+\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}{3(a^2-1)} & \text{при } a^2\neq 1,\\ -\dfrac{x+1}{2}e^{x}-\dfrac{3x+1}{36}e^{-x} & \text{при } a^2=1.\end{cases}$$

6) $y^{IV}-2y''+y=40\operatorname{ch}x$.
Отв. $y=(C_1+C_2x+5x^2)\operatorname{ch}x+(C_3+C_4x)\operatorname{sh}x$.

7) $y^{IV}-8y''-9y=50\operatorname{sh}2x$.
Отв. $y=C_1\sin(x+C_2)+C_3\operatorname{sh}(3x+C_4)-2\operatorname{sh}2x$.

8) $y^{IV}+2a^2y''+a^4y=\operatorname{ch}ax$.
Отв. $y=(C_1+C_2x)\sin ax+(C_3+C_4x)\cos ax+\dfrac{\operatorname{ch}ax}{4a^4}$.

9) $y''-y=\operatorname{th}x$. *Отв.* $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x\operatorname{arctg}e^{x}$.

10) $y''-a^2y=\dfrac{A}{\operatorname{ch}ax}$.
Отв. $y=C_1\operatorname{ch}ax+C_2\operatorname{sh}ax+\dfrac{A}{a}x\operatorname{sh}ax-\dfrac{A}{a^2}\operatorname{ch}ax\ln\operatorname{ch}ax$.

Указание [к 9) и 10)]. Применить метод вариации постоянных.

5. Найти частное решение уравнения $y''-4y=e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=0$.

Отв. $y=y_0\operatorname{ch}2x+\left(\dfrac{y_0'}{2}-\dfrac{1}{8}\right)\operatorname{sh}2x+\dfrac{xe^{2x}}{4}$.

6. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения, понизив предварительно их порядок:

1) $y''+a^2y^2=b^2$. *Отв.* $y=\dfrac{1}{a^2}\ln\operatorname{ch}(abx+C_1)+C_2$.

2) $yy''-y'^2+1=0$. *Отв.* $C_1y=\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$.

3) $ay'''=\sqrt{1+y''^2}$. *Отв.* $y=a^2\operatorname{sh}\dfrac{x+C_1}{a}+C_2x+C_3$.

7. Найти частное решение уравнения $y'' + \left(1 - \frac{\alpha}{h^2}\right) y = 0$ $(\alpha \neq h^2)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = \frac{1}{a}$, $y' = 0$ при $x = 0$.

$$\textit{Отв.}\ ay = \begin{cases} \cos\left(x\sqrt{1 - \frac{\alpha}{h^2}}\right) & \text{при}\quad \alpha < h^2, \\ \operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{h^2} - 1}\right) & \text{при}\quad \alpha > h^2. \end{cases}$$

8. Показать, что общее решение уравнения $yy''' - y'y'' = 0$ может быть записано в трех формах:

$$y = C_1 \sin(C_2x + C_3); \quad y = C_1 \operatorname{sh}(C_2x + C_3); \quad y = C_1 \operatorname{ch}(C_2x + C_3).$$

9. Показать, что общее решение уравнения $ay^{(n)} = \sqrt{1 + (y^{(n-1)})^2}$ выражается в виде

$$y = \varphi(x) + \begin{cases} a^{n-1} \operatorname{sh} \dfrac{x + C_1}{a} & \text{при}\quad n \text{ нечетном}, \\ a^{n-1} \operatorname{ch} \dfrac{x + C_1}{a} & \text{при}\quad n \text{ четном}, \end{cases}$$

где $\varphi(x) = C_2x^{n-2} + C_3x^{n-3} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

10. Показать, что $\cos nl \operatorname{ch} nl = 1$, если дифференциальное уравнение $y^{IV} - a^4y = 0$ имеет решение $y = A(\cos ax - \operatorname{ch} ax) + B(\sin ax - \operatorname{sh} ax)$, которое удовлетворяет граничным условиям: $y = y' = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. A и B — произвольные числа.

11. Найти общие решения линейных однородных уравнений с переменными коэффициентами:

1) $y'' + 2axy' + a^2x^2y = 0.$

$$\textit{Отв.}\ e^{\frac{ax^2}{2}} y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} x\sqrt{a} + C_2 \operatorname{sh} x\sqrt{a} & \text{при}\quad a > 0, \\ C_1 \cos x\sqrt{-a} + C_2 \sin x\sqrt{-a} & \text{при}\quad a < 0. \end{cases}$$

Указание. Применить подстановку $y = \dfrac{u}{e^{\frac{ax^2}{2}}}$.

2) $y'' + 2y' \operatorname{th} x + by = 0.$

$$\textit{Отв.}\ y \operatorname{ch} x = \begin{cases} C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x & \text{при}\quad b - 1 = \alpha^2 > 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x & \text{при}\quad b - 1 = -\alpha^2 < 0. \end{cases}$$

Указание. Применить подстановку $y=\dfrac{u}{\operatorname{ch} x}$.

3) $y''-2y'\operatorname{tg} x+by=0$.

Отв. $y\cos x=\begin{cases} C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x & \text{при} \quad b+1=\alpha^2>0,\\ C_1\operatorname{ch}\alpha x+C_2\operatorname{sh}\alpha x & \text{при} \quad b+1=-\alpha^2<0.\end{cases}$

Указание. Применить подстановку $y=\dfrac{u}{\cos x}$.

4) $xy''-y'-ax^3y=0$.

Отв. $y=\begin{cases} C_1\operatorname{ch}\dfrac{\alpha x^2}{2}+C_2\operatorname{sh}\dfrac{\alpha x^2}{2} & \text{при} \quad a>0,\\ C_1\cos\dfrac{\alpha x^2}{2}+C_2\sin\dfrac{\alpha x^2}{2} & \text{при} \quad a<0,\end{cases}$

причем $\alpha=\sqrt{|a|}$.

Указание. Произвести замену аргумента, положив $\dfrac{\alpha x^2}{2}=t$.

5) $2xy''+y'+ay=0$ $(a\neq 0)$.

Отв. $y=\begin{cases} C_1\cos\sqrt{2ax}+C_2\sin\sqrt{2ax} & \text{при} \quad 2ax>0,\\ C_1\operatorname{ch}\sqrt{|2ax|}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{|2ax|} & \text{при} \quad 2ax<0.\end{cases}$

Указание. Произвести замену аргумента, положив $\sqrt{|2ax|}=t$.

6) $4xy''+2y'-y=0$.

Отв. $y=\begin{cases} C_1\operatorname{ch}\sqrt{x}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{x} & \text{при} \quad x>0,\\ C_1\cos\sqrt{|x|}+C_2\sin\sqrt{|x|} & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$

Указание. Произвести замену аргумента, положив $\sqrt{|x|}=t$.

7) $4(x^2-1)y''+4(2x-1)y'+y=0$.

Отв. $y\sqrt{|x+1|}=C_1+C_2\begin{cases} \arcsin x & \text{при} \quad |x|<1,\\ \operatorname{Arch} x & \text{при} \quad |x|>1.\end{cases}$

Указание. Применить подстановку $y=\dfrac{u}{\sqrt{|x+1|}}$.

8) $y'''+3axy''+3a^2x^2y'+a^3x^3y=0$.

Отв. $e^{\frac{ax^2}{2}}y=\begin{cases} C_1+C_2\operatorname{ch}(x\sqrt{3a})+C_3\operatorname{sh}(x\sqrt{3a}) & \text{при} \quad a>0,\\ C_1+C_2\cos(x\sqrt{|3a|})+C_3\sin(x\sqrt{|3a|}) & \text{при} \quad a<0.\end{cases}$

Указание. Применить подстановку $y=\dfrac{u}{e^{\frac{ax^2}{2}}}$.

12. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x = 3$, $y = 1$ при $t = 0$.

Отв. $x = 4\operatorname{ch} t + t - 1$; $y = 4\operatorname{sh} t - t + 1$.

13. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} x'' + y'' + y' = \operatorname{sh} 2t, \\ 2x'' + y'' = 2t. \end{cases}$$

Отв. $x = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} - \frac{e^{2t}}{16} - \frac{2t+1}{8}e^{-2t} + C_1 + C_2 t + C_3 e^{-2t}$,

$$y = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2t}}{8} + \frac{2t+1}{4}e^{-2t} - 2C_3 e^{-2t} + C_4.$$

ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

12. Цепная линия

График гиперболической функции $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ называется *цепной линией*. Это название связано с тем, что цепь, подвешенная свободно за оба конца, принимает форму этой кривой. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую задачу.

Задача о провисании нити. Тяжелая гибкая однородная нерастяжимая нить, закрепленная концами в двух точках (рис. 14), провисает под действием собственного веса. Вывести уравнение линии провисания нити.

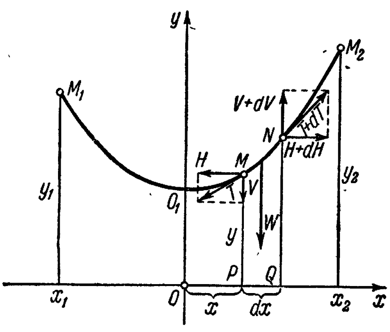

Рис. 14.

Решение. Выделим бесконечно малый элемент нити $\overset{\frown}{MN}$ от точки $M(x, y)$ до точки $N(x+dx, y+dy)$ и выясним, какие силы на него действуют. В точке M на нить действует натяжение $\overline{T}$, направленное по касательной к кривой; его составляющие по осям координат $\overline{H}$ и $\overline{V}$. Соответственно в точке N имеется натяжение $\overline{T}+d\overline{T}$, направленное по касательной в точке N, с составляющими $\overline{H}+d\overline{H}$ и $\overline{V}+d\overline{V}$. Кроме того, на элемент $\overset{\frown}{MN}$ действует направленная вертикально вниз сила тяжести $W=q\,ds$, где ds — дифференциал длины дуги нити, а q — вес единицы длины нити.

Как известно из статики, если система сил находится в равновесии, то сумма проекций на любую ось всех действующих на нее сил равна нулю. Проектируя на ось Ox, получим $-H+(H+dH)=0$, или $dH=0$, откуда следует, что $H=\mathrm{const}$, т. е. что горизонтальная составляющая натяжения во всех точках одна и та же. Проектируя на ось Oy, получим $-V-q\,ds+(V+dV)=0$, или $dV=q\,ds$.

Если обозначить через α угол, образованный касательной в точке M кривой с осью Ox, то, как легко видеть,

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{V}{H}.$$

Дифференцируя по x, будем иметь:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{H}\frac{dV}{dx},$$

но так как $dV=q\,ds$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\frac{ds}{dx}.$$

Пользуясь известным выражением производной длины дуги по абсциссе

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2},$$

получим дифференциальное уравнение

$$ay''=\sqrt{1+y'^2},$$

где принято обозначение $\frac{H}{q}=a$.

Общее решение этого уравнения (см. пример 11 п. 11)

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x+C_1}{a}+C_2$$

представляет собой семейство цепных линий.

Если подобрать произвольные постоянные C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворялись граничные условия ($y=y_1$ при $x=x_1$ и $y=y_2$ при $x=x_2$), то мы найдем искомую линию провисания.

Для упрощения уравнения можно произвести преобразование координат, положив $x = X - C_1$; $y = Y + C_2$, т. е. перенеся оси параллельно самим себе и приняв за новое начало точку $(-C_1, C_2)$, координаты которой находятся из граничных условий. Если за новыми координатами сохранить прежние обозначения, то будем иметь уравнение цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Вместо задания двух точек цепной линии можно задать одну точку и направление касательной в ней, например, вершину $O_1(0, a)$ — низшую точку цепной линии, в которой касательная горизонтальна. Из этих начальных условий ($y = a$ и $y' = 0$ при $x = 0$) можно легко определить произвольные постоянные C_1 и C_2. Для этого вычислим производную $y' = \operatorname{sh} \frac{x + C_1}{a}$ и подставим в выражения для y и y' их значения при $x = 0$. Будем иметь $\operatorname{sh} \frac{C_1}{a} = 0$, откуда $C_1 = 0$ и $a \operatorname{ch} 0 + C_2 = a$, откуда $C_2 = 0$. Таким образом, частным решением нашего уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям, является функция $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, графиком которой служит цепная линия с осью симметрии, совпадающей с осью Oy, отсекающая на оси Oy отрезок $a = \frac{H}{q}$, где q — вес единицы длины нити, а H — горизонтальная проекция натяжения в любой точке нити.

Заметим, что из соотношения $T = \frac{H}{\cos \alpha}$ (см. рис. 14) вытекает, что в вершине цепной линии, где $\alpha = 0$, натяжение нити имеет наименьшее значение.

Принимая во внимание, что $H = aq$, а $\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$, откуда следует, что $T = aq \frac{y}{a} = qy$, заключаем, что в любой точке M цепной линии натяжение нити равно по величине весу отрезка нити длины, равной ординате точки M.

Вертикальная проекция V натяжения определяется следующим образом:

$$V = H \operatorname{tg} \alpha = Hy' = H \operatorname{sh} \frac{x}{a} = aq \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1} = q\sqrt{y^2 - a^2}.$$

Очевидно, что решение задачи нисколько не изменится, если, кроме собственного веса нити, учесть также действующую на нее нагрузку при условии, что она распределена равномерно по длине нити.

Совершенно иначе обстоит дело, если предположить, что нагрузка на нить распределяется равномерно не по длине нити, а по ее горизонтальной проекции. В этом случае нить располагается не по цепной линии, а по параболе.

Цепная линия обладает многими замечательными свойствами. Рассмотрим некоторые из них, произведя попутно вычисления и построения связанных с ней элементов.

Касательная и нормаль. Возьмем на цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ произвольную точку $M(x, y)$. Общий вид уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$. В нашем случае $y' = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ (α — угол, образованный касательной с осью Ox), поэтому уравнение касательной в точке M имеет вид

$$Y - a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}(X - x),$$

или

$$X \operatorname{sh} \frac{x}{a} - Y + \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - x \operatorname{sh} \frac{x}{a}\right) = 0,$$

где X, Y — текущие координаты точки касательной.

Общий вид уравнения нормали $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$. Следовательно, в точке M цепной линии уравнение нормали имеет вид

$$Y - a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = -\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{x}{a}}(X - x),$$

или

$$X + Y \operatorname{sh} \frac{x}{a} - \left(\frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} + x\right) = 0,$$

где X, Y — текущие координаты точки нормали.

Если, например, $x=a$, то $\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\operatorname{ch}1$, $\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\operatorname{sh}1$, $\operatorname{sh}\frac{2x}{a}=\operatorname{sh}2$ и уравнения касательной и нормали в точке $(a,\ a\operatorname{ch}1)$ запишутся в виде

$$X\operatorname{sh}1-Y+a(\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1)=0,$$

$$X+Y\operatorname{sh}1-a\left(\frac{\operatorname{sh}2}{2}+1\right)=0.$$

Требуемые значения гиперболических функций можно найти по таблицам (см. стр. 179): $\operatorname{sh}1=1{,}17520$; $\operatorname{ch}1=1{,}54308$; $\operatorname{sh}2=3{,}62686$.

Обозначим через t, n, s_n, s_t (рис. 15) соответственно длины отрезка касательной MT, отрезка нормали MN, под-

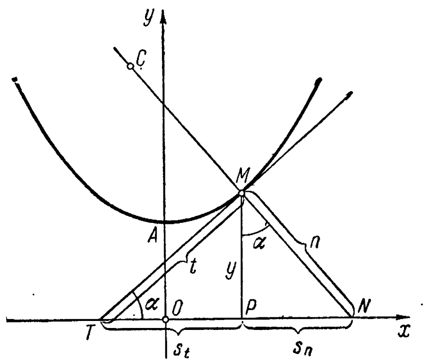

Рис. 15.

касательной TP и поднормали PN. Для вычисления этих величин легко получить следующие формулы:

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|=\left|a\frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{x}{a}}\right|=\left|\frac{y^2}{a\operatorname{sh}\frac{x}{a}}\right|=\left|\frac{y^2}{a}\operatorname{ctg}\alpha\right|,$$

$$n=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}=\frac{y^2}{a},$$

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|a\operatorname{cth}\frac{x}{a}\right|=\left|\frac{y}{\operatorname{sh}\frac{x}{a}}\right|=|y\operatorname{ctg}\alpha|,$$

$$s_n=|yy'|=\left|\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right|=\left|y\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right|=|y\operatorname{tg}\alpha|.$$

Здесь α — угол, образованный касательной с осью Ox, причем $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$.

Вычислим $\cos\alpha$. Имеем:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{a}{y}.$$

На соотношении $\cos\alpha = \frac{a}{y}$ основаны два следующих способа построения касательной к цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ в заданной на ней точке M.

Первый способ. На ординате точки M цепной линии (рис. 16) как на диаметре строим окружность. Из точки P

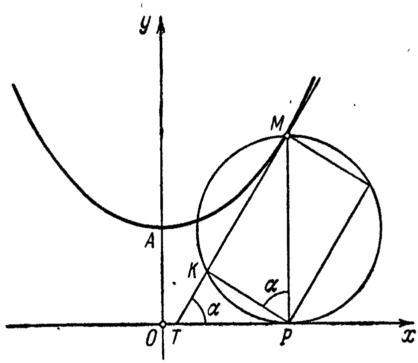

Рис. 16.

как из центра дугой окружности радиуса a сделаем на первой окружности засечку в точке K и проведем прямую MK до пересечения с осью Ox в точке T. Так как косинус угла $\angle KPM$ равен a/y, то $\angle KPM = \alpha$, но $\angle MTP = \angle KPM$, ибо, как это видно из рассмотрения прямоугольных треугольников MTP и KPM, оба угла дополняют один и тот же угол $\angle PMT$ до прямого. Следовательно, прямая MT является касательной к цепной линии в точке M.

Второй способ. Из вершины A цепной линии (рис. 17) как из центра окружности радиусом, равным ординате точки M, сделаем засечку в точке L на той полуоси Ox, со стороны которой находится точка M. Точку L соединим прямой с вершиной A. На эту прямую опустим из точки M перпендикуляр MT. Докажем, что он и будет касательной в точке M. В самом деле, по построению $\angle OAL = \angle MTL$, $\cos\angle OAL = \frac{a}{y} = \cos\angle MTL$, следовательно, MT — касательная.

Параметрические уравнения цепной линии. Выведем параметрические уравнения цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, приняв за параметр угол α между касательной в любой точке

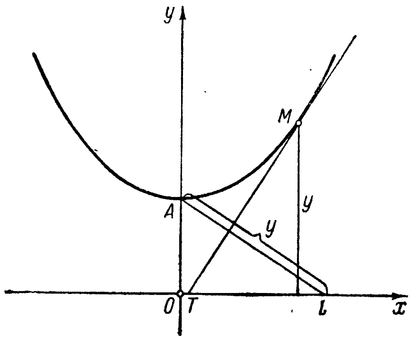

Рис. 17.

цепной линии и осью Ox. Полученное выше соотношение $\cos\alpha = \frac{a}{y}$ перепишем в виде $y = \frac{a}{\cos\alpha}$, и таким образом, одно из искомых параметрических уравнений уже имеется. Для нахождения второго подставим в уравнение цепной линии выражение y через α и найдем x как функцию α. Имеем $\mathrm{ch}\frac{x}{a} = \sec\alpha$, но подобным соотношением связаны между собой гудерманиан (гиперболическая амплитуда) α с аргументом x/a гиперболического косинуса $\left(\text{см. формулу (2) п. 7, где следует положить } t = \frac{x}{a}, \text{ а } \gamma = \alpha\right)$, поэтому на основании формулы (7) п. 7 имеем $x = a\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Итак, мы получили параметрические уравнения цепной линии

$$x = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Кривизна и радиус кривизны. Вычислим кривизну и радиус кривизны цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ в любой ее точке. Для этого найдем y' и y'' и подставим их выражения в формулы кривизны плоской кривой $K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ и радиуса кривизны $R = \frac{1}{K}$. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

и потому кривизна равна

$$K = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{3/2}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a \operatorname{ch}^3 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \frac{a}{y^2},$$

а радиус кривизны $R = \frac{y^2}{a}$.

Можно дать простой способ построения центра C кривизны цепной линии в точке M (рис. 15). Заметив, что длина отрезка MN нормали цепной линии между точкой M на кривой и осью Ox равна радиусу кривизны ($n = R$), отложим на нормали в точке M в сторону вогнутости цепной линии отрезок $MC = MN$. Точка C и есть центр кривизны в точке M.

Наименьший радиус кривизны будет в вершине цепной линии $A(0, a)$, в которой ордината y цепной линии наименьшая. Радиус кривизны в этой точке равен a.

Эволюта цепной линии. *Эволютой* кривой называется геометрическое место центров кривизны кривой. Если обозначить через X, Y текущие координаты точки эволюты, то параметрические уравнения эволюты кривой $y = f(x)$ в общем виде, как известно, таковы:

$$X = x - y' \frac{1+y'^2}{y''},$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Здесь за параметр может быть принят либо x, либо y, либо произвольная величина t, через которую выражаются x и y.

Для нахождения эволюты цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (рис. 18) примем за параметр x. Вычислим $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ и подставим в общие уравнения эволюты выражения y, y', y'' через x. Так как $\frac{1+y'^2}{y''} =$

$$= \frac{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}}{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}} = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$ то получим:

$$X = x - \frac{a}{2} \operatorname{sh} 2\frac{x}{a},$$

$$Y = 2a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

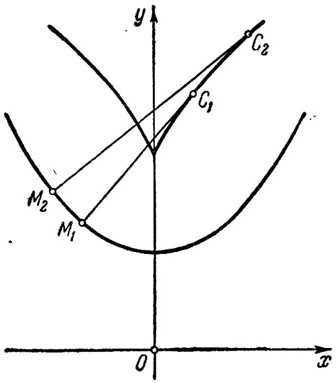

Рис. 18.

Исключим параметр x. Из второго уравнения находим $\operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{Y}{2a}$. Следовательно,

$$x = a \operatorname{Arch} \frac{Y}{2a} = a \ln \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4a^2}}{2a},$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{a} = \pm \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1} = \pm \frac{\sqrt{Y^2 - 4a^2}}{2a},$$

$$\operatorname{sh} \frac{2x}{a} = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \pm \frac{Y\sqrt{Y^2 - 4a^2}}{2a^2}.$$

Подставив полученные выражения в первое уравнение, будем иметь уравнение эволюты цепной линии в неявной форме:

$$x = a \ln \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} \mp \frac{y\sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a}.$$

Здесь текущие координаты обозначены через x, y вместо X, Y.

Эвольвента цепной линии (трактриса). *Эвольвентой*, или *разверткой* кривой, называется такая кривая, по отношению к которой данная кривая является эволютой. Эволюта и эвольвента обладают следующим свойством: *касательная к эволюте служит нормалью к эвольвенте*. Это свойство позволяет составить уравнение эвольвенты, если известно уравнение эволюты.

Пусть уравнение эволюты следующее:

$$\eta = f(\xi).$$

Тогда уравнение касательной к ней будет иметь вид

$$Y - f(\xi) = \frac{d\eta}{d\xi}(X - \xi).$$

Для нахождения уравнения эвольвенты $F(x, y) = 0$ заметим, что ее угловой коэффициент $\frac{dy}{dx}$ связан с угловым коэффициентом эволюты $\frac{d\eta}{d\xi}$ соотношением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p},$$

где положено $\frac{dy}{dx} = p$.

В связи с этим уравнение касательной преобразуется к виду $Y - f(\xi) = -\frac{1}{p}(X - \xi)$ или $x + py = pf(\xi) + \xi$, где X, Y заменены текущими координатами точки эвольвенты x, y.

Из равенства $f'(\xi) = -\frac{1}{p}$ можно выразить ξ как функцию p, и, следовательно, последнее уравнение запишется так:

$$x + py = \Phi(p).$$

Взяв производные по x от обеих частей этого равенства, получим дифференциальное уравнение эвольвенты, из которого определим y как функцию p $(y = \psi(p))$, после чего находим x: $x = -p\psi(p) + \Phi(p)$, или $x = \varphi(p)$. Таким образом, получены параметрические уравнения эвольвенты:

$$x=\varphi(p),$$
$$y=\psi(p).$$

Исключая из них параметр p, получим уравнение эвольвенты в обычной декартовой форме $F(x, y)=0$.

Найдем уравнение эвольвенты цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Для удобства следования приведенной выше схеме запишем заданное уравнение в виде $\eta=a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a}$ и составим уравнение касательной к цепной линии:

$$Y-a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a}=\frac{d\eta}{d\xi}(X-\xi).$$

Так как $\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{1}{p}$, где $p=\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент эвольвенты, то последнее уравнение примет вид

$$Y-a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a}=-\frac{1}{p}(X-\xi).$$

Заменим здесь ξ через функцию от p. Это легко сделать, если учесть, что $\frac{d\eta}{d\xi}=\operatorname{sh}\frac{\xi}{a}$, а значит, $\operatorname{sh}\frac{\xi}{a}=-\frac{1}{p}$, откуда $\xi=-a\operatorname{Arsh}\frac{1}{p}$. Замечая, кроме того, что $\operatorname{ch}\frac{\xi}{a}=$ $=\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{\xi}{a}+1}=\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$, получим после подстановки и замены X, Y через x, y:

$$y-\frac{a\sqrt{p^2+1}}{p}=-\frac{1}{p}\left(x+a\operatorname{Arsh}\frac{1}{p}\right),$$

или

$$x+py=a\sqrt{p^2+1}-a\operatorname{Arsh}\frac{1}{p}. \qquad (*)$$

Продифференцировав по x, получим:

$$(1+p^2)+y\frac{dp}{dx}=\frac{ap}{\sqrt{p^2+1}}\frac{dp}{dx}+\frac{a}{p\sqrt{p^2+1}}\frac{dp}{dx},$$

или

$$(1+p^2)+y\frac{dp}{dx}=\frac{a\sqrt{p^2+1}}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Заменяя dx через $\frac{dy}{p}$, будем иметь:

$$(1+p^2)+py\frac{dp}{dy}=a\sqrt{p^2+1}\frac{dp}{dy},$$

или

$$\frac{dy}{dp}+\frac{p}{p^2+1}y=\frac{a}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Его общее решение

$$y=e^{-\int\frac{p\,dp}{p^2+1}}\left(\int\frac{a}{\sqrt{p^2+1}}e^{\int\frac{p\,dp}{p^2+1}}dp+C\right).$$

Так как $\int\frac{p\,dp}{p^2+1}=\frac{1}{2}\ln(p^2+1)$, а $e^{-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $e^{\frac{1}{2}\ln(p^2+1)}=\sqrt{p^2+1}$, то

$$y=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(ap+C).$$

Вместо p удобнее ввести другой параметр, например t, положив $p=\operatorname{tg} t$, где t — угол, образованный касательной к эвольвенте с осью Ox, тогда $\sqrt{p^2+1}=\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}=$ $=\sec t=\frac{1}{\cos t}$, и мы получим:

$$y=\cos t\,(a\operatorname{tg} t+C),\quad \text{или}\quad y=a\sin t+C\cos t.$$

Подставив выражение y через t в уравнение (*) и заметив, что $\operatorname{Arsh}\frac{1}{p}=\operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} t)=\ln\left(\operatorname{ctg} t+\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t+1}\right)=$ $=\ln(\operatorname{ctg} t+\operatorname{cosec} t)=\ln\frac{\cos t+1}{\sin t}=\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=-\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, получим x как функцию t:

$$x=-\operatorname{tg} t\,(a\sin t+C\cos t)+\frac{a}{\cos t}+a\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

или

$$x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)-C\sin t.$$

Таким образом, параметрическими уравнениями эвольвенты цепной линии служат уравнения

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) - C\sin t,$$

$$y = a\sin t + C\cos t.$$

Это семейство кривых, называемых *трактрисами*. В частном случае, при $C = 0$, получаем:

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),$$

$$y = a\sin t,$$

или, исключая параметр t,

$$x = \pm\sqrt{a^2 - y^2} + a\ln\frac{a \mp \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Рассмотрим несколько подробнее трактрису и ее свойства. Прежде всего дадим определение трактрисы независимо от ее связи с цепной линией. *Трактрисой называется плоская кривая, для которой длина отрезка касательной между точкой касания M (рис. 19) и прямой Ox, называемой базой трактрисы, есть величина постоянная.* Трактрису можно определить и так: если к одному концу гибкой нерастяжимой нити длины a прикреплена материальная точка M, а другой конец P движется по прямой, то траектория точки M есть трактриса.

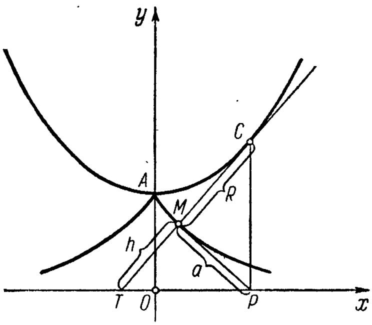

Рис. 19.

Отсюда происхождение названия «трактриса» — линия влечения.

Составим параметрические уравнения трактрисы, приняв за базу ось Ox, а за параметр — угол t наклона касательной к оси Ox (рис. 19). Если a — длина отрезка касательной, то $y=a\sin t$, $dy=a\cos t\,dt$, $dx=a\frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt$ (это следует из равенства $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} t$). Путем интегрирования находим x как функцию t:

$$x=a\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt=a\int\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)dt=$$

$$=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)+C.$$

Зададим точку $A(0,\ a)$, через которую проходит трактриса. Это условие позволит определить постоянную интегрирования C. В точке A с ординатой $y=a$ имеет место равенство $a=a\sin t$, а значит, $t=\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}\right)+C=0,$$

откуда $C=0$.

Таким образом, параметрические уравнения трактрисы, проходящей через точку $A(0,\ a)$, принимают уже знакомый нам вид

$$x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),$$
$$y=a\sin t.$$

При $t\to 0$ и $t\to\pi$ трактриса асимптотически приближается к базе. При $t=\frac{\pi}{2}$ — особая точка $A(0,\ a)$. Касательная к ней совпадает с осью Oy.

Если от параметрических уравнений перейти к неявному уравнению и при этом ввести ареакосинус гиперболический (см. стр. 47), то получим уравнение трактрисы в виде

$$x=\pm\sqrt{a^2-y^2}-a\operatorname{Arch}\frac{a}{y}.$$

Трактриса обладает следующим свойством: *длина отрезка касательной в любой ее точке есть среднее пропорциональное между длиной отрезка нормали и* *радиусом кривизны в этой точке.* В самом деле, вычислим радиус кривизны R трактрисы. Так как

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2\left(\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\right) dt^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 t\, dt^2,$$

то $R = \frac{ds}{dt} = a \operatorname{ctg} t = \frac{a^2 \cos t}{y}$. С другой стороны, длина отрезка нормали между базой и точкой касания равна $n = y\sqrt{1 + y'^2} = y\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{y}{\cos t}$. Поэтому $nR = a^2$, что и требовалось доказать.

Между прочим, отсюда следует, что для построения центра кривизны достаточно восставить перпендикуляр к базе в точке ее пересечения с касательной и продолжить его до пересечения с нормалью.

Этот способ построения в свою очередь позволяет определить координаты центра кривизны трактрисы (см. рис. 19):

$$X = x - a\cos t = a \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

$$Y = \frac{a}{\sin t}.$$

Рассматривая здесь t как параметр, получим параметрические уравнения эволюты трактрисы. Исключим параметр t. Для этого из первого уравнения найдем $\sin t$ и подставим во второе. Имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = e^{\frac{X}{a}}, \quad \sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2e^{\frac{X}{a}}}{1 + e^{\frac{2X}{a}}} = \frac{2}{e^{\frac{X}{a}} + e^{-\frac{X}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{X}{a}},$$

и потому $Y = a \operatorname{ch}\frac{X}{a}$. Эволютой трактриссы оказалась цепная линия.

Обычно в параметрических уравнениях цепной линии в качестве параметра принимают угол α между касательной в любой ее точке с осью Ox. Так как $t = \frac{\pi}{2} + \alpha$, то уравнения цепной линии примут известный нам вид:

$$x = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y = \frac{a}{\cos \alpha},$$

где текущие координаты X, Y заменены через x, y.

Натуральное уравнение линии. *Натуральным уравнением линии называется уравнение, связывающее ее радиус кривизны с длиной дуги, отсчитываемой от некоторой точки линии.* Выведем натуральное уравнение цепной линии, приняв за точку отсчета ее вершину $A(0, a)$. Так как радиус кривизны цепной линии в произвольной точке $M(x, y)$ равен $R = \frac{y^2}{a} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$, а длина дуги $\breve{AM}$ равна $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, то, исключив из этих двух равенств x, получим искомое уравнение. Имеем

$$s^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = a^2\left(\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1\right) = aR - a^2,$$

откуда следует, что $R = a + \frac{s^2}{a}$.

Выведем также натуральные уравнения эволюты и эвольвенты цепной линии. Напомним сначала два известных свойства этих линий. Свойство первое: *нормаль в точке эвольвенты служит касательной в соответствующей точке эволюты*; свойство второе: *приращение радиуса кривизны эвольвенты равно по абсолютной величине длине дуги эволюты между ее двумя соответствующими точками.* Пользуясь этими свойствами, выведем два важных для дальнейшего соотношения. Если обозначить через R и s радиус кривизны и длину дуги эвольвенты, а через ρ и σ — радиус кривизны и длину дуги эволюты, то последнее свойство можно записать в виде $|\Delta R| = |\Delta\sigma|$, отсюда имеем $\left|\frac{\Delta R}{\Delta\sigma}\right| = 1$. В пределе получаем $\left|\frac{dR}{d\sigma}\right| = 1$, откуда $|dR| = |d\sigma|$, и следовательно, $R = \sigma + C$, где C — произвольная постоянная, которую, в частности, можно положить равной нулю (выбрав определенным образом начало отсчета σ), и тогда $R = \sigma$.

Второе соотношение связывает радиусы кривизны эволюты и эвольвенты. Согласно определению, имеем $\frac{1}{\rho}=\frac{d\beta}{d\sigma}$ и $\frac{1}{R}=\frac{d\alpha}{ds}$, где $\Delta\beta$ и $\Delta\alpha$ — углы смежности эволюты и эвольвенты. Путем деления получим $\frac{R}{\rho}=\frac{d\beta}{d\sigma}:\frac{d\alpha}{ds}$, но $\alpha=\beta$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, следовательно, $d\alpha=d\beta$, а $|d\sigma|=|dR|$. Поэтому последнее соотношение преобразуется к виду $\frac{\rho}{R}=\left|\frac{dR}{ds}\right|$ или $\rho=\left|R\frac{dR}{ds}\right|$.

Теперь обратимся к цепной линии и прежде всего дадим вывод натурального уравнения ее эволюты. Обозначая через R и s радиус кривизны и длину дуги цепной линии, а через ρ и σ — соответствующие величины для эволюты цепной линии, мы сводим нашу задачу к нахождению зависимости между ρ и σ. Из последнего равенства имеем $\frac{dR}{ds}=\frac{\rho}{R}$ или $\frac{dR}{ds}=\frac{\rho}{\sigma}$, поскольку $R=\sigma$ (мы принимаем $C=0$). Путем дифференцирования по s обеих частей натурального уравнения цепной линии получим $\frac{dR}{ds}=\frac{2s}{a}$; сравнивая оба выражения для $\frac{dR}{ds}$, имеем $\frac{\rho}{\sigma}=\frac{2s}{a}$, откуда $s=\frac{a\rho}{2\sigma}$. Остается подставить это выражение s в натуральное уравнение цепной линии и заменить в нем R на σ, и мы получим искомое уравнение эволюты цепной линии $\sigma=a+\frac{a\rho^2}{4\sigma^2}$ или $4\sigma^3=a(\rho^2+4\sigma^2)$.

Для вывода натурального уравнения эвольвенты цепной линии $R=a+\frac{s^2}{a}$ заметим, что цепная линии по отношению к искомой кривой является эволютой, а потому, обозначая через ρ и σ радиус кривизны и длину дуги эвольвенты, следует переписать исходные соотношения в виде $R=\rho\frac{d\rho}{d\sigma}$ и $s=\rho$ (мы опять полагаем $C=0$). Подставляя в уравнение цепной линии вместо R и s их выражения, получим $\rho \frac{d\rho}{d\sigma} = a + \frac{\rho^2}{a}$, откуда $\frac{\rho\, d\rho}{\rho^2 + a^2} = \frac{d\sigma}{a}$.

Взяв квадратуры, будем иметь $\frac{1}{2} \ln(\rho^2 + a^2) = \frac{\sigma}{a} + \frac{1}{2} \ln C_1$, или $\rho^2 + a^2 = C_1 e^{\frac{2\sigma}{a}}$. В частности, при $C_1 = 1$ имеем $\rho^2 + a^2 = e^{\frac{2\sigma}{a}}$.

Как нам уже известно, эвольвентой цепной линии служит трактриса. Таким образом, полученное уравнение есть натуральное уравнение трактрисы. Это можно проверить и непосредственно, путем преобразования натурального уравнения в декартово.

Цепная линия как рулета. *Если в плоскости xOy кривая L катится по неподвижной кривой B, то траектория точки M, связанной с L, называется рулетой*

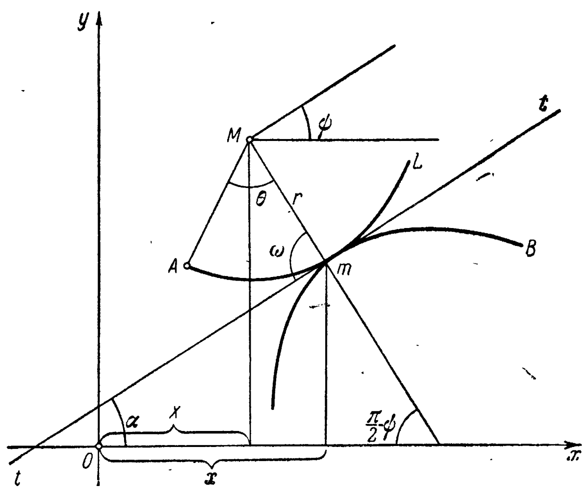

Рис. 20.

(рис. 20). Имеет место следующая принадлежащая Декарту теорема, которую мы примем без доказательства: *нормаль в любой точке M рулеты проходит через точку m касания кривых L и B.*

Выведем уравнение рулеты. Пусть $y = f(x)$ — уравнение неподвижной кривой B, а $Y = F(X)$ — искомое уравнение рулеты как геометрического места точек M. Обозначим через ψ угол, образованный касательной к рулете с осью Ox; тогда $\operatorname{tg}\psi = F'(X)$. Соединим точку M с точкой A, взятой на подвижной кривой L, и обозначим через θ угол $\angle AMm$. Тогда θ и r будут полярными координатами точки m подвижной кривой, уравнение которой, следовательно, будет $r = r(\theta)$. Приняв во внимание теорему Декарта, получим для координат точки M следующие формулы:

$$X = x - r\sin\psi,$$
$$Y = y + r\cos\psi.$$

Заменяя в этих формулах y через $f(x)$, Y через $F(X)$, $\operatorname{tg}\psi$ через $F'(X)$, получим:

$$X = x - \frac{rF'(X)}{\sqrt{1+[F'(X)]^2}},$$
$$Y = f(x) + \frac{r}{\sqrt{1+[F'(X)]^2}}.$$

Обозначим через ω угол $\angle Mmt$. Имеем

$$\operatorname{tg}\omega = r\frac{d\theta}{dr}\ ^{*)}, \text{ причем } \omega = \alpha + \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2} - (\psi - \alpha)$$

и

$$\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F'(X) - f'(x)}{1 + F'(X)f'(x)}.$$

---

*) Справедливость формулы $\operatorname{tg}\omega = r\dfrac{d\theta}{dr}$ легко проверить с помощью соотношений между полярными и декартовыми координатами точки: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Если обозначить через β угол между полярной осью MA и касательной в произвольной точке m кривой, то $\beta = \omega + \theta$, откуда $\omega = \beta - \theta$ и $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\beta}$. Так как $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{dy}{dx}$, то $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{dy - \operatorname{tg}\theta\, dx}{dx + \operatorname{tg}\theta\cdot dy}$. Подставляя в эту формулу выражения дифференциалов $dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$, $dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$, получим после несложных преобразований $\operatorname{tg}\omega = r\dfrac{d\theta}{dr}$.

Таким образом, мы получили:

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d\theta}{dr} &= \frac{1+F'(X)f'(x)}{F'(X)-f'(x)}, \\ X &= x-\frac{rF'(X)}{\sqrt{1+[F'(X)]^2}}, \\ Y &= y+\frac{r}{\sqrt{1+[F'(X)]^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Если даны две кривые, то можно определить третью с помощью этих уравнений.

Определим для примера кривую, которую опишет фокус параболы, катящейся по прямой. Рассмотрим случай, когда при начальном положении ось параболы перпендикулярна к оси Ox, т. е. когда фокус имеет наинизшее положение.

Уравнение параболы возьмем в полярных координатах $r=\frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$, где a — расстояние от фокуса до вершины параболы. Следовательно, $\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{\cos^3\frac{\theta}{2}}{a\sin\frac{\theta}{2}}$. Уравнение неподвижной линии $y=0$ ($f(x)=0$). Следовательно, $f'(x)=0$. Первое из уравнений системы (*) поэтому принимает вид

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{1}{F'(X)}, \qquad \text{или} \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{dY}{dX}.$$

Приняв это во внимание, запишем третье из уравнений системы (*) в виде

$$Y=\frac{a\sec^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}},$$

или

$$Y\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}=a\left[1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right],$$

откуда

$$y=a\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}.$$

Общее решение этого уравнения (см. пример 10 п. 11) — семейство цепных линий $y = a\operatorname{ch}\frac{x+C}{a}$ (мы заменили X, Y через x, y).

Для определения C заметим, что в начальный момент фокус имел координаты $x=0$, $y=a$. Отсюда следует, что $C=0$, и потому решением является цепная линия $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Площадь криволинейной трапеции и длина дуги. Площадь Q криволинейной трапеции $OAMP$ (см. рис. 16), ограниченной цепной линией $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, двумя ординатами, соответствующими абсциссам 0 и x, и осью Ox, равна

$$Q = \int_0^x y\,dx = a\int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^x =$$

$$= a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a} = a\sqrt{y^2-a^2}.$$

Длина дуги s цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от вершины $A(0, a)$ до точки $M(x, y)$ равна

$$s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \sqrt{y^2-a^2}.$$

Сравнивая выражения для Q и s, замечаем, что $Q = as$, т. е. площадь криволинейной трапеции $OAMP$ равна площади прямоугольника, построенного на отрезках PK и KM, так как $PK = a$, а из прямоугольного треугольника PKM имеем:

$$KM = \sqrt{y^2-a^2} = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}-1} = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = s.$$

Между прочим, последнее равенство ($KM = s$) дает очень простой способ графического спрямления цепной линии.

Если криволинейная трапеция (рис. 21) ограничена цепной линией $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, двумя ординатами $x = x_1$, $x = x_2$ $(0 < x_1 < x_2)$ и осью абсцисс, то ее площадь равна

$$Q = a^2\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right) = a\left(\sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}\right),$$

где y_1 и y_2 — ординаты точек цепной линии M_1 и M_2, соответствующие абсциссам x_1 и x_2.

Длина дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$ цепной линии равна

$$s = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right) = \sqrt{y_2^2 - a^2} - \sqrt{y_1^2 - a^2}.$$

Легко указать, как построить прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции $P_1M_1M_2P_2$. Из вершины A

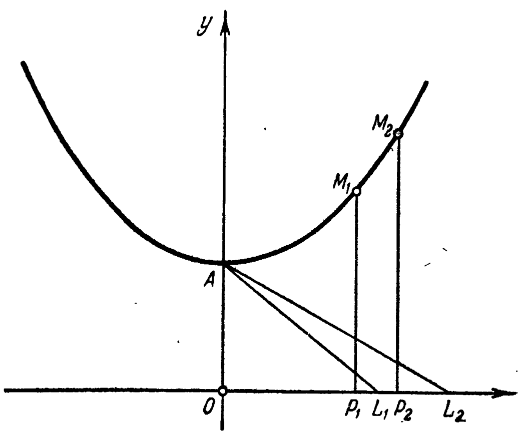

Рис. 21.

цепной линии как из центра окружности радиусами, равными y_1 и y_2, сделаем засечки на положительной полуоси Ox в точках L_1 и L_2. Эти точки отстоят от начала координат на расстояниях $OL_1 = \sqrt{y_1^2 - a^2}$ и $OL_2 = \sqrt{y_2^2 - a^2}$. Поэтому прямоугольник со сторонами L_1L_2 и $OA = a$ будет иметь площадь Q, равную площади криволинейной трапеции $P_1M_1M_2P_2$: $Q = L_1L_2 \cdot OA$.

Отрезок L_1L_2 по длине равен дуге $\smile{M_1M_2}: s = L_1L_2$.

Если ввести углы α_1 и α_2, образованные с осью Ox касательными к цепной линии в точках M_1 и M_2, то

$$s = a(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = y_2 \sin\alpha_2 - y_1 \sin\alpha_1.$$

В самом деле, $y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\alpha$. В то же время

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \operatorname{th}\frac{x}{a},$$

а так как $a = \dfrac{y}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}$, то в свою очередь $a\operatorname{tg}\alpha = y\operatorname{th}\frac{x}{a} = y\sin\alpha$.

Центр тяжести криволинейной трапеции и дуги. Определим центры тяжести площади криволинейной трапеции $OAMP$ и дуги $\smile{AM}$ (рис. 16). Как известно, координаты x_Q и y_Q центра тяжести однородной криволинейной трапеции (с постоянной поверхностной плотностью) определяются по формулам $x_Q = \frac{M_y}{Q}$, $y_Q = \frac{M_x}{Q}$, где M_y и M_x — статические моменты площади $OAMP$ относительно осей Oy и Ox, равные соответственно

$$\int_0^x xy\,dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx.$$

В нашем случае

$$M_y = \int_0^x xy\,dx = a\int_0^x x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a^2\int_0^x x\,d\left(\operatorname{sh}\frac{x}{a}\right) =$$

$$= a^2\left[x\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right]_0^x = a^2\left(x\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + a\right),$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx = \frac{a^2}{2}\int_0^x \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a^2}{2}\int_0^x \frac{1+\operatorname{ch}2\frac{x}{a}}{2}\,dx =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[x + \frac{a\operatorname{sh}2\frac{x}{a}}{2}\right]_0^x = \frac{a^2}{4}\left(x + a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right).$$

Поэтому

$$x_Q = \frac{M_y}{Q} = \frac{a^2\left(x\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + a\right)}{a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}} = x - \frac{a(y-a)}{s},$$

$$y_Q = \frac{M_x}{Q} = \frac{a^2\left(x + a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)}{4a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}} = \frac{1}{4}\left(\frac{ax}{s} + y\right).$$

Аналогично координаты x_s и y_s центра тяжести дуги однородной кривой (с постоянной линейной плотностью) определяются по формулам $x_s = \frac{m_y}{s}$, $y_s = \frac{m_x}{s}$, где m_y и m_x — статические моменты дуги кривой относительно осей Oy и Ox, равные соответственно $\int_0^s x\,ds$ и $\int_0^s y\,ds$. В нашем случае

$$m_y = \int_0^s x\,ds = \int_0^x x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= a\left(x\operatorname{sh}\frac{x}{a} - a\operatorname{ch}\frac{x}{a} + a\right),$$

$$m_x = \int_0^s y\,ds = \int_0^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx = a\int_0^x \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\left(x + a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right).$$

Поэтому

$$x_s = \frac{m_y}{s} = x - \frac{a(y-a)}{s}, \quad \text{а} \quad y_s = \frac{1}{2}\left(\frac{ax}{s} + y\right).$$

Сравнивая формулы для координат центров тяжести криволинейной трапеции и дуги цепной линии, замечаем, что $x_Q = x_s$, а $y_Q = \frac{1}{2} y_s$, т. е. их абсциссы одинаковы, а ордината центра тяжести трапеции вдвое меньше ординаты центра тяжести дуги.

Формулы для вычисления координат центра тяжести дуги $\breve{AM}$ цепной линии могут быть преобразованы к виду

$$x_s = x - (y - a)\operatorname{ctg}\alpha, \qquad y_s = \frac{1}{2}(y + x\operatorname{ctg}\alpha),$$

где α — угол, образованный касательной в точке M с осью Ox. Это следует из равенства $s = a\operatorname{tg}\alpha$.

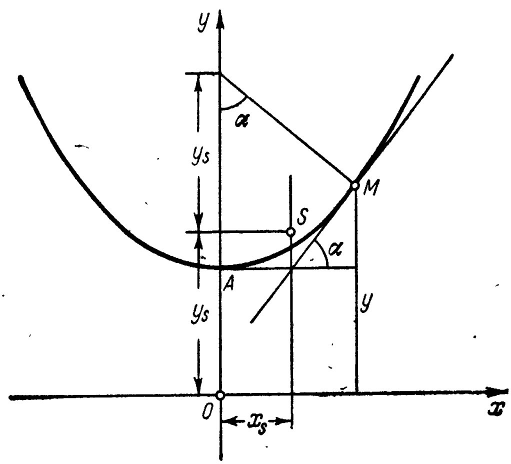

Рис. 22.

С помощью этих формул можно построить центр тяжести S дуги $\breve{AM}$. Очевидно, его абсцисса x_s равна абсциссе точки пересечения касательных, проведенных в вершине A цепной линии и в точке M (рис. 22), а ордината y_s

равна половине отрезка, отсекаемого на оси Oy нормалью в точке M.

Если абсциссы точек M_1 и M_2 (рис. 21) имеют одинаковые знаки (например, $0 < x_1 < x_2$) и s_1 и s_2 — длины дуг $\smile{AM_1}$ и $\smile{AM_2}$ $(s_2 > s_1)$, причем x_{s_1}, y_{s_1}, x_{s_2}, y_{s_2} — координаты центров тяжести этих дуг, то можно доказать, что координаты x_s, y_s центра тяжести дуги $\smile{M_1M_2}$ длиной $s = s_2 - s_1$ определяются по формулам

$$x_s = \frac{s_2 x_{s_2} - s_1 x_{s_1}}{s}, \qquad y_s = \frac{s_2 y_{s_2} - s_1 y_{s_1}}{s}.$$

Если же абсциссы точек M_1 и M_2 имеют противоположные знаки, т. е. эти точки находятся по разные стороны от оси Oy, то $s = s_1 + s_2$ и

$$x_s = \frac{s_2 x_{s_2} + s_1 x_{s_1}}{s},$$

$$y_s = \frac{s_2 y_{s_2} + s_1 y_{s_1}}{s}.$$

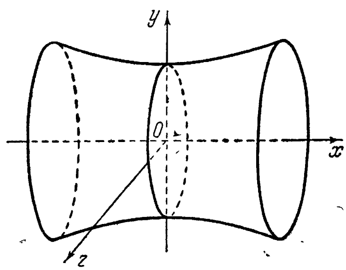

Рис. 23.

Катеноид. При вращении цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ вокруг оси Ox получается поверхность вращения, называемая *катеноидом* (рис. 23). Вычислим объем V тела, ограниченного катеноидом, координатной плоскостью yOz и плоскостью, параллельной ей и отстоящей от нее на расстоянии x. По известной из интегрального исчисления формуле будем иметь:

$$V = \pi \int_0^x y^2\, dx = \pi a^2 \int_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left(x + a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right) = \frac{\pi a}{2}(ax + sy).$$

Площадь Q поверхности этой же части катеноида может быть вычислена по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^s y\,ds = 2\pi \int_0^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$= 2\pi a \int_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\,dx = \pi(ax + sy).$$

Сравнивая выражения для объема V и площади поверхности Q, устанавливаем, что $V = \frac{a}{2}Q$.

Минимальные свойства цепной линии. Катеноид обладает замечательным свойством. Если поставить такую задачу: среди линий, соединяющих две данные точки плоскости xOy, найти ту, дуга которой при вращении вокруг оси Ox образует поверхность с наименьшей площадью, — то, как мы сейчас увидим, такой линией окажется цепная линия.

Площадь поверхности вращения вычисляется по известной формуле

$$Q = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Наша задача заключается в том, чтобы найти проходящую через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ кривую, дуга которой $\smile{M_1M_2}$ при вращении вокруг оси Ox образовала бы поверхность с наименьшей площадью Q. Допустим, что мы такую кривую нашли, пусть ее уравнение $y = f(x)$. Если взять любую другую кривую $y = f(x) + \alpha\eta(x)$, проходящую через те же две точки, вследствие чего $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, то для достаточно малого α интеграл

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} (y + \alpha\eta)\sqrt{1 + (y' + \alpha\eta')^2}\,dx$$

будет больше интеграла

$$I(0) = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Следовательно, функция $I(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha=0$. Но тогда для функции $I(\alpha)$ в точке $\alpha=0$ должно быть выполнено необходимое условие экстремума $I'(0)=0$, причем это условие должно выполняться для всякой рассматриваемой функции $\eta(x)$. Продифференцируем функцию $I(x)$ по α, положим в производной $\alpha=0$ и приравняем ее нулю. Имеем:

$$I'(\alpha)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\eta\sqrt{1+(y'+\alpha\eta')^2}+(y+\alpha\eta)\frac{(y'+\alpha\eta')\eta'}{\sqrt{1+(y'+\alpha\eta')^2}}\right]dx,$$

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\sqrt{1+y'^2}+\frac{yy'\eta'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)dx=0.$$

Преобразуем вторую часть последнего интеграла, пользуясь формулой интегрирования по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{yy'\eta'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\,d(\eta)=$$

$$=\frac{yy'\eta}{\sqrt{1+y'^2}}\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta\,\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Так как $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, то первое слагаемое обращается в нуль, и мы получаем равенство

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta\left[\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\right]dx=0.$$

Этот интеграл должен обращаться в нуль для всякой рассматриваемой функции $\eta(x)$, а это возможно только, когда множитель при $\eta(x)$ в подынтегральной функции равен нулю, т. е. когда

$$\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0\,*).$$

Раскроем второе слагаемое. Имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=\frac{(yy''+y'^2)\sqrt{1+y'^2}-\dfrac{yy'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}=$$

$$=\frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Последнее уравнение при этом примет вид

$$\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=0,$$

или

$$(1-yy'')(1+y'^2)+yy'^2y''=0,$$

и окончательно

$$1+y'^2-yy''=0.$$

Это дифференциальное уравнение рассмотрено в примере 8 п. 11. Его общее решение

$$y=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1}$$

представляет собой семейство цепных линий.

---

*) В самом деле, если для любой непрерывной функции $\eta(x)$ интеграл $\int\limits_a^b \eta(x)F(x)\,dx=0$, то $F(x)\equiv 0$ на отрезке $[a, b]$. Допустим противное, а именно, что в точке $x=x_0$ отрезка $[a, b]$ $F(x_0)\neq 0$, например $F(x_0)>0$; тогда функция $F(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=x_0$. Выберем функцию $\eta(x)$ так, чтобы $\eta(x)>0$ в этой окрестности и $\eta(x)=0$ вне этой окрестности, тогда и интеграл $\int\limits_a^b \eta(x)F(x)\,dx>0$, что противоречит условию.

Итак, установлено, что экстремум площади поверхности вращения может достигаться только в случае, когда кривой $y=f(x)$ является цепная линия. Можно доказать, что в этом случае действительно имеет место экстремум, и притом минимум, но доказательство мы опускаем.

Цепная линия обладает еще одним минимальным свойством: *центр тяжести дуги плоской кривой заданной длины, закрепленной в двух точках своими концами, занимает наинизшее положение именно тогда, когда кривая — цепная линия*. В этом можно убедиться из следующих соображений. Как известно, ордината центра тяжести дуги плоской кривой вычисляется по формуле

$$y_s=\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

По условию, $\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$, где $l=\text{const}$. Следовательно, задача сводится к отысканию вида кривой, для которой интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ принимает наименьшее значение, а эта задача была решена выше, при рассмотрении вопроса о наименьшей площади поверхности вращения, и было показано, что такой кривой является цепная линия.

Заметим, наконец, что при равновесии системы материальных точек потенциальная энергия системы достигает минимума, поэтому тяжелая однородная гибкая нерастяжимая нить, закрепленная в двух точках, будет провисать по цепной линии, так как минимуму потенциальной энергии соответствует наинизшее положение центра тяжести.

Рассмотрим ряд задач, решение которых приводит к цепной линии или которые связаны с цепной линией.

Задачи, связанные с цепной линией.

Задача 1. Гибкая однородная нерастяжимая проволока длины $2s$ закреплена концами в двух точках, находящихся на одной высоте и отстоящих друг от друга на расстоянии

$2l$ $(l<s)$. Под действием собственного веса она провисает. Найти уравнение линии провисания проволоки.

Решение. Выберем оси координат таким образом, чтобы ось Ox была горизонтальна, а ось Oy проходила посредине между точками M_1 и M_2. При таком выборе осей абсциссы последних будут соответственно l и $-l$.

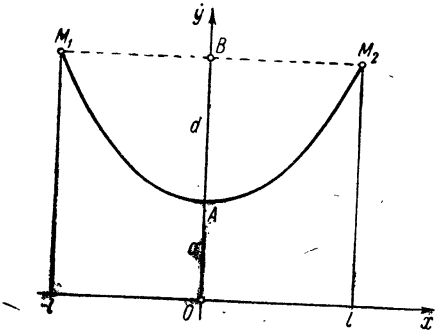

Рис. 24.

Из решения задачи о провисании нити (см. стр. 92) известно, что искомой кривой будет цепная линия $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Но там параметр a был известен $\left(a=\frac{H}{q}\right.$, где H — горизонтальная проекция натяжения нити, а q — вес единицы длины нити), здесь же вся задача сводится к определению параметра a, равного расстоянию от начала координат до вершины цепной линии (рис. 24).

По формуле для вычисления длины дуги кривой имеем:

$$2s=\int_{-l}^{l}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-l}^{l}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=2a\operatorname{sh}\frac{l}{a}.$$

Разлагая $\operatorname{sh}\frac{l}{a}$ в степенной ряд (см. стр. 58), получим:

$$\frac{s}{a}=\frac{l}{a}\left[1+\frac{1}{3!}\left(\frac{l}{a}\right)^2+\frac{1}{5!}\left(\frac{l}{a}\right)^4+\ldots\right].$$

Положим $\frac{3!\,(s-l)}{l}=u$, $\left(\frac{l}{a}\right)^2=z$ и перепишем последнее равенство в виде

$$u=z+\frac{3!}{5!}z^2+\frac{3!}{7!}z^3+\ldots=\varphi(z).$$

Произведем обращение этого ряда, т. е. выразим из него z как функцию u. Тогда можно будет вычислить

$a=\frac{l}{\sqrt{z}}$. Для этого составим ряд Маклорена для функции $z=f(u)$:

$$z=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}u+\frac{f''(0)}{2!}u^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n+\ldots$$

В этом разложении $f(0)=0$, что вытекает непосредственно из ряда для u. Из неотрицательности z следует, что $z=0$ при $u=0$.

Для производных функции $f(u)$ имеем:

$$f'(u)=\frac{1}{\varphi'(z)},\quad f''(u)=-\frac{\varphi''(z)}{[\varphi'(z)]^3},$$

$$f'''(u)=\frac{3[\varphi''(z)]^2-\varphi'(z)\varphi'''(z)}{[\varphi'(z)]^5},\ \ldots$$

Отсюда можно найти $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., положив $z=0$.

Итак, имеем:

$$f'(0)=1,\quad f''(0)=-\frac{3!2}{5!}=-\frac{1}{10},\quad f'''(0)=\frac{4}{175},\ \ldots,$$

и потому

$$z=u-\frac{1}{20}u^2+\frac{2}{525}u^3+\ \ldots$$

Наша задача решена. Как было сказано выше, для нахождения a остается взять отношение l к $\sqrt{z}$ $\left(a=\frac{l}{\sqrt{z}}\right)$.

Если требуется определить величину $d=AB$, т. е. расстояние от середины B хорды M_1M_2 до вершины цепной линии („провес“), то берем разность

$$d=a\operatorname{ch}\frac{l}{a}-a=a\left(\operatorname{ch}\sqrt{z}-1\right),$$

откуда после подстановки вместо $\operatorname{ch}\sqrt{z}$ его разложения в ряд получим:

$$d=a\left(\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^3}{6!}+\ldots\right).$$

Остается заменить a на $l/\sqrt{z}$.

Подставляя вместо z его выражение через u в виде ряда и пренебрегая членами порядка выше второго, будем иметь:

$$d=\frac{l}{2}\sqrt{u}\left(1+\frac{7}{120}u-\frac{379}{201\,600}u^2\right),$$

где $u=\frac{6(s-l)}{l}$.

Так, если $2l=50$ *м*, $2s=50{,}036$ *м*, то $d=0{,}822$ *м*. Вычисление величины d может понадобиться, например, при расчете провисания телеграфной проволоки.

Задача 2. Определить горизонтальное натяжение в любой точке цепи длиной $2s$, подвешенной концами в двух

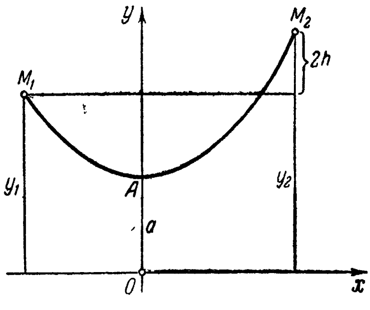

Рис. 25.

точках, длина пролета между которыми равна $2l$, а разность высот $2h$. Вес единицы длины цепи q.

Решение. При решении этой задачи будем рассматривать цепь как гибкую нерастяжимую однородную нить. Выберем оси координат так, как указано на рис. 25. Тогда нижняя точка цепи и оба конца будут иметь координаты $A(0, a)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

По условию задачи $x_2-x_1=2l$ и $y_2-y_1=2h$.

Так как точки M_1 и M_2 лежат на цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, то их координаты удовлетворяют уравнению линии, поэтому

$$y_1=a\operatorname{ch}\frac{x_1}{a},\quad y_2=a\operatorname{ch}\frac{x_2}{a}$$

и, следовательно,

$$2h = y_2 - y_1 = a\left(\operatorname{ch}\frac{x_2}{a} - \operatorname{ch}\frac{x_1}{a}\right) = 2a\operatorname{sh}\frac{x_1+x_2}{2a}\operatorname{sh}\frac{x_2-x_1}{2a}.$$

Длина дуги цепной линии от точки $M_1(x_1, y_1)$ до точки $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$2s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x_1}^{x_2} = a\left(\operatorname{sh}\frac{x_2}{a} - \operatorname{sh}\frac{x_1}{a}\right) =$$

$$= 2a\operatorname{sh}\frac{x_2-x_1}{2a}\operatorname{ch}\frac{x_1+x_2}{2a}.$$

Сократим каждое из последних равенств на 2, возведем в квадрат обе части каждого из них и составим разность

$$s^2 - h^2 = a^2\operatorname{sh}^2\frac{x_2-x_1}{2a}\left(\operatorname{ch}^2\frac{x_1+x_2}{2a} - \operatorname{sh}^2\frac{x_1+x_2}{2a}\right).$$

Выражение, заключенное в скобки, равно единице. Поэтому

$$s^2 - h^2 = a^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{a}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{a}}{\frac{l}{a}} = \frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l}.$$

Если заданы s, h и l, то можно найти a, а зная a и q, можно определить горизонтальное натяжение H. Произведем численный расчет для следующих данных: $2s = 100$ *м*, $2h = 20$ *м*, $2l = 50$ *м*, а вес одного метра цепи равен 20 *кГ* $\left(q = 20\ \frac{кГ}{м}\right)$.

Подставляя эти данные в правую часть последней формулы, получим:

$$\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l} = \frac{\sqrt{2500-100}}{25} = \frac{48{,}99}{25} = 1{,}96.$$

Остается решить уравнение

$$\frac{\operatorname{sh} t}{t} = 1{,}96, \qquad (*)$$

где $t = \frac{l}{a}$.

Разложение гиперболического синуса $\operatorname{sh} t$ в ряд по степеням t (формула (2) п. 9) имеет вид:

$$\operatorname{sh} t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

Возьмем первые три члена и подставим в уравнение (*), получим:

$$1 + \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} = 1{,}96,$$

или

$$t^4 + 20t^2 - 115{,}2 = 0.$$

Решение этого биквадратного уравнения дает $t^2 = 4{,}66$ (знак минус перед корнем в формуле отброшен, ибо t^2 — существенно положительная величина), откуда $t = 2{,}16$.

Так как $t = \frac{l}{a}$, то $a = \frac{l}{t} = \frac{25}{2{,}16} = 11{,}6$. В свою очередь $a = \frac{H}{q}$, отсюда $H = aq = 11{,}6 \cdot 20 \doteq 232$ *кГ*.

Задача 3. В различных точках гибкой нити подвешены стержни с одинаковыми поперечными сечениями, но различной длины. Нижние концы этих стержней расположены на горизонтальной прямой. Допуская что благодаря частому расположению стержней нагрузку можно считать распределенной непрерывно, найти форму равновесия нити.

Решение. Элемент $\overset{\frown}{MN}$ нити находится, как и в задаче, разобранной на стр. 92, под действием сил натяжения $\overline{T}$ и $\overline{T} + d\overline{T}$ в точках M и N (рис. 14), направленных по касательным в этих точках, и под действием нагрузки W, направленной вертикально вниз. Разлагая силы $\overline{T}$ и $\overline{T} + d\overline{T}$ на горизонтальные и вертикальные составляющие $\overline{H}$, $\overline{H} + d\overline{H}$, $\overline{V}$, $\overline{V} + d\overline{V}$ и проектируя все действующие на элемент $\overset{\frown}{MN}$ силы на оси Ox и Oy, получим $dH = 0$, откуда $H = \mathrm{const}$, и $dV = W$.

Так как $\frac{V}{H} = \operatorname{tg}\alpha = y'$, где α — угол наклона касательной к оси Ox, то $V = Hy'$, откуда $\frac{dV}{dx} = Hy''$ и $dV = Hy''\,dx$. Нагрузка W пропорциональна площади элементарной криволинейной трапеции $PMNQ$, т. е. равна $ky\,dx$. Следовательно, $Hy''\,dx = ky\,dx$ или $y'' - a^2y = 0$, где положено $\frac{k}{H} = a^2$.

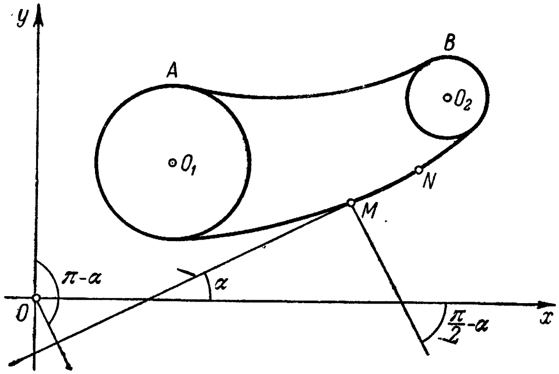

Рис. 26.

Это уравнение рассмотрено в примере 1 п. 11. Его общее решение

$$y = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \operatorname{sh} ax.$$

Для нахождения произвольных постоянных предположим, что низшая точка нити $O_1(0, a)$, т. е. что $y = a$ и $y' = 0$ при $x = 0$. Так как

$$y' = a(C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax),$$

то при подстановке вместо y и y' их значений при $x = 0$ получим $C_1 = a$, $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Рассмотрим два шкива с приводным ремнем (рис. 26). Если предположить, что шкивы находятся в покое, то решение задачи о провисании нити (см. стр. 92) показывает, что приводной ремень располагается по цепной линии. Предположим теперь, что любая точка ремня движется равномерно со скоростью v. Заранее не очевидно, что и в этом случае приводной ремень будет провисать по цепной линии. Однако это так, и мы в этом убедимся из решения следующей задачи.

Задача 4. Шкивы A и B вращаются так, что любая точка приводного ремня движется с одной и той же постоянной линейной скоростью v. Найти уравнение линии провисания ремня; вес погонного метра ремня равен q.

Решение. Выделим бесконечно малый элемент ремня $\overset{\frown}{MN}$. На этот элемент, как и в задаче 1, действуют силы натяжения и вес. Если мы к этим силам присоединим фиктивную центробежную силу инерции, направленную по нормали к элементу, то, согласно принципу Даламбера, получим уравновешенную систему сил, для которых вместо уравнения движения можно рассматривать уравнения равновесия.

Центробежная сила, действуя по нормали к элементу $\overset{\frown}{MN}$ в точке M, составляет с осями координат углы $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ и $\pi-\alpha$ (α — угол между касательной в точке M и осью Ox). Величина этой силы равна $\frac{v^2 dm}{R}$, где dm — масса элемента ремня длины ds, v — его скорость, а R — радиус кривизны траектории, которую мы предполагаем совпадающей с линией провисания ремня.

Так как $dm=\frac{q\,ds}{g}$, а $R=\frac{ds}{d\alpha}$, то величина центробежной силы инерции выразится через $\frac{qv^2\,d\alpha}{g}$, а ее проекции на оси Ox и Oy соответственно через $\frac{qv^2 \sin\alpha\, d\alpha}{g}$ и $-\frac{qv^2 \cos\alpha\, d\alpha}{g}$. Напишем уравнения равновесия:

$$dH+\frac{qv^2}{g}\sin\alpha\, d\alpha=0,$$

$$dV-\frac{qv^2}{g}\cos\alpha\, d\alpha-q\,ds=0.$$

Интегрируя первое уравнение, будем иметь равенство

$$H-\frac{qv^2}{g}\cos\alpha=K, \qquad (*)$$

где K — постоянная интегрирования.

Если задать низшую точку провисающего ремня, в которой горизонтальное натяжение равно H_0, то, положив $\alpha = 0$, найдем, что $K = H_0 - \frac{qv^2}{g}$.

Второе уравнение перепишем так:

$$d\left(V - \frac{qv^2}{g}\sin\alpha\right) = q\,ds.$$

Умножив обе части равенства (*) на $\operatorname{tg}\alpha$, получим:

$$H\operatorname{tg}\alpha - \frac{qv^2}{g}\sin\alpha = K\operatorname{tg}\alpha,$$

но так как $\frac{V}{H} = \operatorname{tg}\alpha$, то $H\operatorname{tg}\alpha = V$ и

$$V - \frac{qv^2}{g}\sin\alpha = Ky' \qquad (\operatorname{tg}\alpha = y').$$

Вследствие этого второе уравнение примет вид

$$d(Ky') = q\,ds \quad \text{или} \quad ay'' = \sqrt{1 + y'^2},$$

где положено $\frac{K}{q} = a$. Его общее решение (см. пример 11 п. 11) $y = a\operatorname{ch}\frac{x + C_1}{a} + C_2$ представляет собой семейство цепных линий.

Задача 5. Найти кривую, зная, что длина ее дуги $\smile{M_0M} = s$ от неподвижной точки $M_0(0, a)$, касательная в которой параллельна оси Ox, до переменной точки $M(x, y)$ связана с радиусом кривизны R в точке M соотношением $s^2 = a(R - a)$, где $a = \text{const}$ (задано нормальное уравнение кривой).

Решение. Так как радиус кривизны R в любой точке кривой, по определению, есть производная дуги кривой s по углу α, образованному касательной к кривой с осью Ox $\left(R = \frac{ds}{d\alpha}\right)$, то данное в условии задачи соотношение переходит в дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$s^2 = a\left(\frac{ds}{d\alpha} - a\right).$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{a\,ds}{s^2+a^2}=d\alpha,$$

откуда, беря квадратуры, будем иметь:

$$\operatorname{arctg}\frac{s}{a}=\alpha+C.$$

Определим C. Для этого заметим, что при $x=0$ длина дуги кривой $s=0$ и угол $\alpha=0$, что вытекает из начального условия $\operatorname{tg}\alpha=y'=0$ при $x=0$. Следовательно, $C=0$ и полученный интеграл переходит в равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{s}{a}=\alpha, \text{ откуда } s=a\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=ay'.$$

Дифференцируя по x, получим уравнение

$$xy''=\sqrt{1+y'^2}.$$

Его общее решение (см. пример 11 п. 11)

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x+C_1}{a}+C_2.$$

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия: $y=a$, $y'=0$ при $x=0$.

Продифференцируем полученное решение; будем иметь:

$$y'=\operatorname{sh}\frac{x+C_1}{a}.$$

Подстановка начальных условий в это равенство приводит к уравнению относительно C_1:

$$\operatorname{sh}\frac{C_1}{a}=0,$$

откуда $C_1=0$.

Подставляя начальные условия и $C_1=0$ в общее решение, получим:

$$a\operatorname{ch}0+C_2=a,$$

откуда $C_2=0$.

Итак, окончательно уравнение искомой кривой примет вид «стандартного» уравнения цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Если бы начальные условия были заданы в более общем виде:

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

то частное решение дифференциального уравнения $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$, удовлетворяющее этим начальным условиям, можно получить из общего решения $y = a\operatorname{ch}\frac{x + C_1}{a} + C_2$ следующим образом.

Найдя y' из общего решения и подставив вместо x и y' числа x_0 и y_0', получим уравнение для определения C_1:

$$y_0' = \operatorname{sh}\frac{x_0 + C_1}{a},$$

откуда $x_0 + C_1 = a\operatorname{Arsh} y_0'$ и $C_1 = a\operatorname{Arsh} y_0' - x_0$.

Подстановка начальных условий и вычисленного значения C_1 в общее решение приводит к уравнению относительно C_2:

$$y_0 = a\operatorname{ch}\frac{x_0 + a\operatorname{Arsh} y_0' - x_0}{a} + C_2, \quad \text{или} \quad y_0 = a\operatorname{ch}\operatorname{Arsh} y_0' + C_2,$$

откуда $C_2 = y_0 - a\sqrt{1 + y_0'^2}$.

Следовательно, окончательно получаем частное решение в виде

$$y = a\operatorname{ch}\left(\frac{x - x_0}{a} + \operatorname{Arsh} y_0'\right) + y_0 - a\sqrt{1 + y_0'^2}.$$

Задача 6. Найти кривую, зная, что радиус кривизны в любой ее точке равен длине отрезка нормали в этой точке.

Решение. Длина отрезка нормали, как известно, равна $\left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|$, а радиус кривизны равен $\left|\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$. Приравнивая друг другу эти выражения, составляем дифференциальное уравнение

$$\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right| = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,$$

или после сокращения на $\sqrt{1+y'^2}$ и умножения обеих частей на y'':

$$|yy''| = 1+y'^2.$$

Здесь следует рассмотреть два случая: когда y и y'' одинакового знака (что при положительном y соответствует вогнутости кривой вверх) и когда y и y'' имеют разные знаки. В первом случае наше уравнение записываем так:

$$yy'' = 1+y'^2.$$

Его общее решение (см. пример 8 п. 11)

$$y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1}$$

представляет собой семейство цепных линий.

Во втором случае наше уравнение запишем так:

$$yy'' = -(1+y'^2).$$

Интегрирование этого уравнения проведем методом понижения порядка уравнения. Положим $y'=p$; тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, и наше уравнение переходит в уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$yp\frac{dp}{dy} = -(1+p^2).$$

После разделения переменных и взятия квадратур получим:

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = -\ln y + \ln C_1.$$

Потенцирование дает

$$1+p^2 = \left(\frac{C_1}{y}\right)^2,$$

откуда

$$p = \pm\frac{\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}.$$

Заменив p через $\frac{dy}{dx}$, разделив переменные и взяв квадратуры, будем иметь:

$$\sqrt{C_1^2-y^2}=\pm(x+C_2),$$

откуда после возведения в квадрат получим в качестве решения семейство окружностей с центрами на оси Ox:

$$(x+C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

Задача 7. Полюс, относительно которого дано уравнение кривой

$$r^n\cos n\theta=a^n,$$

неразрывно связан с этой кривой. Найти геометрическое место точек, которое опишет полюс (рулету), когда кривая будет катиться без скольжения по оси Ox.

Решение. В нашем случае $\theta=\frac{1}{n}\arccos\frac{a^n}{r^n}$, откуда $\frac{d\theta}{dr}=\frac{a^n}{r\sqrt{r^{2n}-a^{2n}}}$. Уравнение неподвижной линии $y=0$. Поэтому первое и третье из уравнений системы (*) (стр. 111) примут вид

$$\frac{a^n}{\sqrt{r^{2n}-a^{2n}}}=\frac{1}{F'(X)},\qquad Y=\frac{r}{\sqrt{1+[F'(X)]^2}}.$$

Из первого из этих уравнений находим $r=a\{1+[F'(X)]^2\}^{\frac{1}{2n}}$ и подставляем во второе уравнение; получим:

$$Y=a\{1+[F'(X)]^2\}^{\frac{1-n}{2n}},$$

или

$$Y^{\frac{2n}{1-n}}=a^{\frac{2n}{1-n}}\{1+[F'(X)]^2\},$$

откуда

$$F'(X)=\frac{dY}{dX}=\sqrt{\left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{2n}{1-n}}-1}$$

и, следовательно,

$$X=\int\frac{dY}{\sqrt{\left(\frac{Y}{a}\right)^{\frac{2n}{1-n}}-1}}+C.$$

В частности, при $n=\frac{1}{2}$ уравнение подвижной кривой $r=\frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ представляет собой параболу. Дифференциальное уравнение рулеты $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2-1}$ или $y=a\sqrt{1+(y'^2)}$. Его общий интеграл (см. пример 10 п. 11) — семейство цепных линий $y=a\operatorname{ch}\frac{x+C}{a}$. При $n=-1$ дифференциальное уравнение рулеты $dy=\sqrt{\frac{a-y}{y}}\,dx$ определяет семейство циклоид $x+C=\frac{a}{2}\operatorname{Arccos}\frac{a-2y}{a}-\sqrt{ay-y^2}$. При $n=2$ уравнение подвижной кривой $r^2\cos 2\theta=a^2$ представляет собой равностороннюю гиперболу. Дифференциальное уравнение рулеты будет $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^4-y^4}}{y^2}$, откуда $x=\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{a^4-y^4}}+C$. Полученный интеграл в конечном виде не берется.

Упражнения

1. Определить горизонтальную составляющую натяжения в любой точке цепи, подвешенной концами в двух точках и находящейся под действием собственного веса, если длина цепи 120 *м*, длина пролета между ее концами (разность абсцисс точек) 80 *м*, а разность высот концов 10 *м*. Вес 1 *м* цепи 10 *кГ*.

Отв. 242 *кГ*.

2. Найти кривые, обладающие следующими свойствами:

а) проекция ординаты любой точки кривой на нормаль постоянна;

б) отрезок нормали между любой точкой кривой, в которой проведена нормаль, и осью Ox пропорционален квадрату ординаты кривой;

в) отрезок касательной между точкой касания и осью Ox пропорционален произведению квадрата ординаты точки на котангенс угла, образованного касательной с осью Ox.

Отв. Во всех трех случаях получаем дифференциальное уравнение $y=a\sqrt{1+y'^2}$, его общее решение $y=a\operatorname{ch}\frac{x+C_1}{a}$ — семейство цепных линий.

3. На цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ взята произвольная точка $M(x, y)$. Ее проекция на ось Ox — точка P, а проекция точки P на касательную, проведенную в точке M цепной линии, — точка N. Доказать, что отрезок PN имеет постоянную длину, равную a.

4. Найти кривую, радиус кривизны которой пропорционален отрезку нормали. Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности $k = 1, 2$.

Отв. $\pm(x + C_2) = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}$ или же $\pm(x + C_2) = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{-\frac{2}{k}} - 1}}$. Интеграл берется в конечном виде при k целом.

При $k = 1$ — семейство цепных линий $y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x + C_2}{C_1}$ (см. решение задачи 6 на стр. 131, случай 1) или семейство окружностей с центрами на оси Ox: $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ (см. там же, случай 2).

При $k = 2$ — семейство парабол $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$ или семейство циклоид $\pm(x + C_2) = \frac{C_1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{C_1 - 2y}{C_1} - \sqrt{C_1 y - y^2}$.

5. Найти кривую, зная, что радиус кривизны в любой ее точке пропорционален квадрату секанса угла между касательной в этой точке с осью Ox.

Отв. $y = a \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{a} + C_2$.

6. Сохраняя условия задачи 5, получить параметрические уравнения искомой кривой, приняв за параметр угол α между касательной и осью Ox.

Указание. $R = \frac{ds}{d\alpha}$, $\frac{ds}{d\alpha} = a \sec^2 \alpha$, $ds = \sec \alpha \, dx$, $dx = a \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$, $dy = a \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$.

Отв. $\begin{cases} x = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + C_1, \\ y = \frac{a}{\cos \alpha} + C_2. \end{cases}$

7. Найти кривую, зная, что площадь криволинейной трапеции P_0M_0MP, образованной дугой кривой $\overset{\frown}{M_0M}$, постоянной ординатой P_0M_0, переменной ординатой PM и осью Ox, пропорциональна длине дуги кривой.

Отв. $y = a \operatorname{ch} \frac{x + C}{a}$.

8. Найти кривую, зная, что длина ее дуги s от некоторой постоянной точки до переменной точки $M(x, y)$ пропорциональна угловому коэффициенту касательной в точке M.

Отв. $y = a \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{a} + C_2$.

9. Сохраняя условия задачи 8, получить параметрические уравнения искомой кривой, приняв за параметр угол α между касательной и осью Ox.

Отв. $$\begin{cases} x = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + C_1, \\ y = \frac{a}{\cos \alpha} + C_2. \end{cases}$$

10. Найти кривую, у которой длина дуги $s = \smile{AM}$, отсчитываемая от некоторой постоянной точки $A(x_0, a)$, связана с ординатой переменной точки $M(x, y)$ соотношением:

а) $s = \sqrt{y^2 - a^2}$;

б) $s = a \ln \frac{y}{a}$.

Отв. а) $y = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a}$; б) $x - x_0 = \sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ (трактриса).

11. Составить параметрические уравнения трактрисы по ее натуральному уравнению $\rho^2 + a^2 = a^2 e^{-\frac{2\sigma}{a}}$

Отв. $$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - a \sin t. \end{cases}$$

12. Составить натуральное уравнение эволюты трактрисы, заданной натуральным уравнением:

а) $\rho^2 + a^2 = e^{\frac{2\sigma}{a}}$;

б) $\rho^2 + a^2 = a^2 e^{-\frac{2\sigma}{a}}$.

Отв. а) $R = a + \frac{s^2}{a}$; б) $R = -a - \frac{s^2}{a}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и трактрисой $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

Отв. $\frac{\pi a^2}{2}$.

14. Доказать, что длина дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от вершины $A(0, a)$ до точки $M(x, y)$ равна $\sqrt{y^2 - a^2}$.

15. Вычислить длину дуги кривой:

а) $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактриса) в пределах для y от b до a $(0 < b < a)$;

б) $r = a\,\mathrm{th}\,\frac{\varphi}{2}$ в пределах для φ от 0 до 2π;

в) $x = a(\mathrm{sh}\,t - t)$, $y = a(\mathrm{ch}\,t - 1)$ в пределах для t от 0 до T;

г) $y = \ln \mathrm{cth}\,\frac{x}{2}$ в пределах для x от a до b $(0 < a < b)$.

Отв. а) $a \ln \frac{a}{b}$;

б) $a(2\pi - \mathrm{th}\,\pi)$;

в) $2\left(\mathrm{ch}\,\frac{T}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,T} - 1\right) - \sqrt{2}\ln \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{T}{2} + \sqrt{\mathrm{ch}\,T}}{1 + \sqrt{2}}$;

г) $\ln \frac{\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{sh}\,a}$.

16. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = px$ от вершины $O(0, 0)$ до точки $M(x, y)$.

Указание. Применить формулу $s = \int\limits_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ при вычислении интеграла произвести подстановку $\frac{2y}{p} = \mathrm{sh}\,u$.

Отв. $\frac{y}{p}\sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} + \frac{p}{2}\ln \frac{2\left(y + \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}}\right)}{p}$.

17. Вычислить длину дуги логарифмической кривой $y = a \ln x$ от точки $A(a, a \ln a)$ до точки $M(x, y)$.

Указание. Применить формулу $s = \int\limits_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; при вычислении интеграла произвести подстановку $\frac{a}{x} = \mathrm{sh}\,u$.

Отв. $\sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} - a\sqrt{2} + a \ln(1 + \sqrt{2})$.

18. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ вокруг оси Ox (катеноидом), и двумя плоскостями $x = -b$ и $x = b$.

Отв. $\frac{\pi a^3}{2}\left(\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a} + \frac{2b}{a}\right)$.

19. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением дуги цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ в пределах от $x = -b$ до $x = b$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Отв. а) $\pi a\left(2b + a\,\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a}\right)$; б) $2\pi a\left(a + b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right)$.

20. В точке $M(x, y)$ цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ проведена касательная до пересечения с осью Ox в точке T. Определить разность площадей поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox дуги AM (A — вершина цепной линии) и отрезка касательной TM. Выразить эту разность: а) как функцию от абсциссы x точки M; б) как функцию от абсциссы X точки T.

Указание. $Q = Q_1 - Q_2$; $Q_1 = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(M)} y\,ds = \pi a x + \frac{\pi a^2}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}$,

$$Q_2 = \pi y MT = \pi a^2 \frac{\mathrm{ch}^3 \frac{x}{a}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}}.$$ Следовательно, $Q = \pi a\left(x - a\,\mathrm{cth}\,\frac{x}{a}\right)$.

Чтобы выразить Q в зависимости от X, следует в уравнении касательной $Y - y = y'(X - x)$ положить $Y = 0$; тогда $x = X + a\,\mathrm{cth}\,\frac{x}{a}$, и поэтому $Q = \pi a X$.

Отв. а) $\pi a\left(x - a\,\mathrm{cth}\,\frac{x}{a}\right)$; б) $\pi a X$.

13. Некоторые прикладные задачи

Гиперболические функции встречаются при решении различных задач из механики, теплотехники, электротехники, химии и т. д. Рассмотрим некоторые из них.

Падение тела в воздухе. Задача 1. Материальная точка массы m падает в воздухе с начальной скоростью, равной нулю. Принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, найти закон движения точки, т. е. пройденный ею путь s как функцию времени t.

Решение. Из курса динамики известно, что $m\overline{w} = \overline{F}$, где $\overline{w}$ — ускорение точки, а $\overline{F}$ — равнодействующая сил, действующих на точку.

Выберем положительное направление на вертикальной прямой вниз, по линии действия силы тяжести. Тогда

$$F = mg - cv^2,$$

где g — ускорение силы тяжести, а c — коэффициент пропорциональности ($c > 0$).

Так как $w = \frac{dv}{dt}$, то дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2,$$

откуда, разделив на m, получим:

$$\frac{dv}{dt} = g - k^2v^2,$$

где положено $\frac{c}{m} = k^2$.

Попутно заметим, что так как $\frac{dv}{dt} > 0$, то отсюда следует, что $g - k^2v^2 > 0$, или $v < \frac{\sqrt{g}}{k}$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим:

$$dt = \frac{dv}{g - k^2v^2}.$$

Неопределенный интеграл от правой части уравнения вычисляем по формуле (16) п. 8 (с учетом того, что $v < \frac{\sqrt{g}}{k}$):

$$\int \frac{dv}{g - k^2v^2} = -\frac{1}{k^2}\int \frac{dv}{v^2 - \frac{g}{k^2}} = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{Arth} \frac{kv}{\sqrt{g}} + C_1.$$

Таким образом, мы приходим к общему интегралу

$$t = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{Arth} \frac{kv}{\sqrt{g}} + C_1.$$

Используя начальное условие ($v=0$ при $t=0$), находим $C_1=0$, и потому частное решение будет

$$t=\frac{1}{k\sqrt{g}}\operatorname{Arth}\frac{kv}{\sqrt{g}}.$$

Разрешив это уравнение относительно v, получим:

$$v=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}\left(k\sqrt{g}\,t\right). \qquad (1)$$

При возрастании аргумента гиперболический тангенс стремится к единице, поэтому с возрастанием времени t скорость v стремится к предельному значению

$$v\Big|_{t=\infty}=\frac{\sqrt{g}}{k}. \qquad (2)$$

Для нахождения закона движения точки заменим в уравнении (1) скорость v через $\frac{ds}{dt}$, получим:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}\left(k\sqrt{g}\,t\right),$$

откуда

$$s=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}\left(k\sqrt{g}\,t\right)+C_2.$$

Но $s=0$ при $t=0$, и потому $C_2=0$. Следовательно, закон движения падающей точки будет иметь вид

$$s=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}\left(k\sqrt{g}\,t\right). \qquad (3)$$

При достаточно больших значениях t можно считать, что $\operatorname{ch}k\sqrt{g}\,t\approx\frac{e^{k\sqrt{g}\,t}}{2}$, и мы получаем приближенную формулу

$$s\approx\frac{\sqrt{g}}{k}t-\frac{\ln 2}{k^2}.$$

Выразим из уравнения (3) t через s. Для этого умножим обе части уравнения на k^2 и произведем потенцирование; получим:

$$\operatorname{ch}\left(k\sqrt{g}\,t\right)=e^{k^2s}. \qquad (4)$$

Так как $\operatorname{Arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$ (см. формулу (8) п. 3), то уравнение (4) можно записать и так:

$$t = \frac{1}{k\sqrt{g}} \ln\left(e^{k^2 s} + \sqrt{e^{2k^2 s} - 1}\right). \tag{5}$$

Перед корнем взят знак плюс, потому что в противном случае при возрастании s уменьшалось бы t, что противоречит смыслу задачи.

При больших значениях s можно в формуле (5) пренебречь единицей, стоящей под знаком радикала, и получить приближенную формулу

$$t \approx \frac{ks}{\sqrt{g}} + \frac{\ln 2}{k\sqrt{g}}.$$

Можно получить еще соотношение между s и v. Если принять во внимание, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

то исходное уравнение переходит в следующее:

$$v\frac{dv}{ds} = g - k^2 v^2.$$

Разделяя переменные, получим:

$$ds = \frac{v\,dv}{g - k^2 v^2},$$

или после взятия квадратур

$$s = -\frac{1}{2k^2}\ln\left(g - k^2 v^2\right) + C.$$

Используя начальное условие $s = 0$ при $v = 0$, находим $C = \frac{1}{2k^2}\ln g$, поэтому

$$s = \frac{1}{2k^2}\ln\frac{g}{g - k^2 v^2},$$

или, разрешая относительно v,

$$v = \frac{\sqrt{g}}{k}\sqrt{1 - e^{-2k^2 s}}. \tag{6}$$

Выведенные формулы относятся к падению в воздухе материальной точки, но их можно рассматривать как приближенно верные и при падении тела. Однако в этом случае необходимо учесть сопротивление воздуха, зависящее от величины, формы и веса тела, а также от плотности воздуха. При этом k определяется с помощью эмпирической формулы

$$k^2 = \alpha \frac{\gamma f}{q}, \tag{7}$$

где γ — удельный вес (в среднем $\gamma = 1{,}225$ *кГ/м*^{3}, что соответствует весу 1 *м*^{3} воздуха при давлении 760 *мм* и температуре 15° С); f — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, в *м*^{2}; q — вес тела в *кГ*; α — безразмерный, так называемый «коэффициент сопротивления», зависящий от формы тела и определяемый опытным путем; так, например, для горизонтально падающей квадратной пластинки $\alpha = 0{,}631$; для полусферы отверстием вниз (парашют) $\alpha = 0{,}664$ и т. д.

Формула (7) вместе с предыдущими результатами позволяет решить такую задачу.

Задача 1а. Определить скорость, которую будет иметь через 2 *сек* после начала падения находящаяся до того в покое горизонтальная квадратная пластинка со стороной 1 *м* и весом 2 *кГ*. Предполагается, что при падении пластинка остается горизонтальной.

Решение. В данном случае

$$k^2 = \frac{0{,}631 \cdot 1{,}225 \cdot 1}{2} = 0{,}386;$$

$$\frac{\sqrt{g}}{k} = 5{,}038; \qquad k\sqrt{g} = 1{,}947.$$

Подставляя эти значения, а также значение $t = 2$ *сек* в формулу (1), находим:

$$v = 5{,}038 \operatorname{th} 3{,}894 = 5{,}038 \cdot 0{,}999 = 5{,}034 \text{ м/сек}.$$

Этот результат практически не отличается от предельной скорости $v\Big|_{t=\infty} = \frac{\sqrt{g}}{k} = 5{,}038$ *м/сек*, которую вообще может достичь падающая пластинка. Таким образом, предельная скорость, развиваемая теоретически через бесконечно большой промежуток времени, практически достигается уже в конце второй секунды после начала падения.

Движение материальной точки. Задача 2. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы отталкивания от некоторого центра. Эта сила пропорциональна расстоянию точки от центра (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения (коэффициент пропорциональности $k_1 > 0$). Скорость в начальный момент, когда точка находится на расстоянии a от центра, равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей движущуюся точку с центром. Найти закон движения точки.

Решение. Если примем центр за начало координат O, а траекторию точки — за ось Ox, то дифференциальное уравнение движения запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = kx - k_1\frac{dx}{dt},$$

а начальные условия: $x = a$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ при $t = 0$.

Путем деления обеих частей уравнения движения на m, получим:

$$x'' + \frac{k_1}{m}x' - \frac{k}{m}x = 0.$$

Общее решение этого уравнения (см. пример 3 п. 11):

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \operatorname{ch}\beta t + C_2 \operatorname{sh}\beta t),$$

где положено $\frac{k_1}{2m} = \alpha$, $\sqrt{\alpha^2 + \frac{k}{m}} = \beta$.

Из начальных условий находим, что $C_1 = a$, а $C_2 = \frac{\alpha a + v_0}{\beta}$, и, следовательно,

$$x = e^{-\alpha t}\left(a \operatorname{ch}\beta t + \frac{\alpha a + v_0}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right).$$

Задача 3. Определить закон прямолинейного движения материальной точки массы m, притягиваемой к центру с силой, пропорциональной расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности mk^2). Сопротивление среды пропорционально скорости (коэффициент пропорциональности $2mh > 0$). В начальный момент времени расстояние точки от центра равно a, а скорость направлена по прямой, соединяющей точку с центром, и равна v_0 $\left(x = a \text{ и } v = \frac{dx}{dt} = v_0\right.$ при $t = 0$).

Решение. Дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Рассмотрим три случая.

1. $h^2 - k^2 < 0$. Положим $k^2 - h^2 = k_1^2$; тогда $r_{1,2} = -h \pm ik_1$, и общее решение будет

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t).$$

Из начальных условий находим, что

$$C_1 = a, \quad C_2 = \frac{v_0 + ah}{k_1},$$

и, следовательно, закон движения

$$x = e^{-ht}\left(a \cos k_1 t + \frac{v_0 + ah}{k_1} \sin k_1 t\right).$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$x = Ae^{-ht} \cos (k_1 t + \alpha),$$

где

$$A = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_0 + ah}{k_1}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0 + ah}{ak_1}.$$

Оно определяет колебательное движение с периодом $T = \frac{2\pi}{k_1}$ и переменной амплитудой Ae^{-ht}.

2. $h^2 - k^2 > 0$. Положим $h^2 - k^2 = k_2^2$; тогда $r_{1,2} = -h \pm k_2$, и общее решение (см. пример 3 п. 11) будет

$$x = e^{-ht}(C_1 \operatorname{ch} k_2 t + C_2 \operatorname{sh} k_2 t).$$

Из начальных условий находим

$$C_1 = a, \quad C_2 = \frac{v_0 + ah}{k_2},$$

и, следовательно, закон движения:

$$x = e^{-ht}\left(a \operatorname{ch} k_2 t + \frac{v_0 + ah}{k_2} \operatorname{sh} k_2 t\right).$$

Движение апериодическое (не колебательное).

3. $h^2 - k^2 = 0$. В этом случае $r_1 = r_2 = -h$, и общее решение будет

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t).$$

Из начальных условий находим $C_1 = a$, $C_2 = v_0 + ah$, и, следовательно, закон движения $x = e^{-ht}\,[a + (v_0 + h)\,t]$. Как и в случае 2, движение апериодическое.

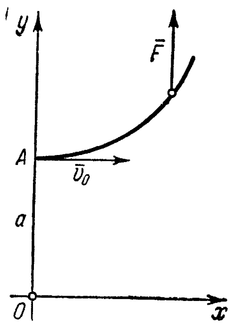

Рис. 27.

Задача 4. Материальная точка массы m отталкивается от оси Ox с силой, пропорциональной расстоянию от этой оси (коэффициент пропорциональности mk^2). В начальный момент времени расстояние между ними равно a, а скорость параллельна оси Ox и равна v_0 (рис. 27). Найти уравнение траектории точки.

Решение. Составляем систему дифференциальных уравнений движения точки на плоскости:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mk^2 y. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $x = C_1 t + C_2$, а из второго (см. пример 1 п. 11) $y = C_3 \operatorname{ch} kt + C_4 \operatorname{sh} kt$. Начальные условия: $x = 0$, $x' = v_0$, $y = a$, $y' = 0$ при $t = 0$. Подставляя их в общие решения для x и y, получим:

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = a, \quad C_4 = 0,$$

и уравнения движения точки (они же — уравнения траектории в параметрическом виде) можно записать так:

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = a \operatorname{ch} kt. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений t. Для этого из первого уравнения найдем $t = \frac{x}{v_0}$ и подставим во второе уравнение; будем иметь $y = a \operatorname{ch} \frac{kx}{v_0}$. В частном случае, когда $\frac{v_0}{k} = a$, траекторией служит цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Скольжение цепочки. Задача 5. Тяжелая однородная цепочка длиной l расположена так, что часть ее лежит на гладком горизонтальном столе, а конец ее длиной a свисает над краем стола (рис. 28). Из этого положения цепочка начинает скользить вниз. За какое время она соскользнет со стола?

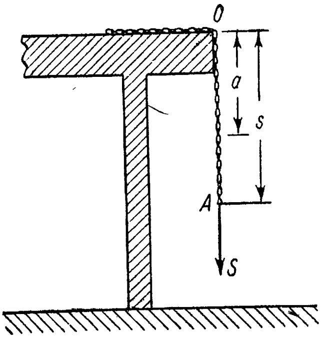

Рис. 28.

Решение. Определим движение нижнего конца цепочки. Начало координат выберем в точке O и направим ось Os вниз. Абсцисса точки A в момент времени t равна s. Ускоряющей силой является вес свисающей со стола части цепочки $\frac{mg}{l} s$; она придает всей массе цепочки ускорение $\frac{d^2 s}{dt^2}$; поэтому дифференциальное уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{mg}{l} s, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{g}{l} s = 0.$$

Его общее решение (см. пример 1 п. 11):

$$s = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Из начальных условий $\left(s=a,\ \frac{ds}{dt}=0 \text{ при } t=0\right)$ определяем $C_1=a$, $C_2=0$, и закон движения будет

$$s=a\operatorname{ch}\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Когда цепочка соскользнет со стола, то $s=l$, и время скольжения T можно определить из уравнения

$$a\operatorname{ch}\sqrt{\frac{g}{l}}T=l,$$

откуда получаем, что

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\operatorname{Arch}\frac{l}{a}=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-a^2}}{a}.$$

Если, например, $l=6$ *м*, $a=1$ *м*, то $T=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$ *сек.*

Задача 6. Тяжелая однородная цепочка переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной 8 *м*, а с другой стороны — часть в 10 *м*. За какое время цепочка соскользнет с гвоздя?

Решение. Обозначим через s путь в метрах, пройденный за время t концом опускающейся части цепочки; длина этой части будет равна $s+10$, а поднимающейся $8-s$. Ускоряющая сила при скольжении равна разности весов частей цепочки, свисающих с обеих сторон, т. е. $F=\gamma[(10+s)-(8-s)]=2\gamma(s+1)$, где γ — вес 1 *м* цепочки. Ускорение w в момент времени t равно $w=\frac{F}{m}=2\frac{\gamma}{m}(s+1)=k(s+1)$, где m — масса всей цепочки, а $k=\frac{2\gamma}{m}$ — коэффициент, который можно определить, если учесть, что в тот момент, когда вся цепочка соскользнет, т. е. при $s=8$, ее ускорение станет равным $g=9{,}8$ *м/сек*^{2}. Следовательно, $g=9k$, откуда $k=\frac{g}{9}$.

Составляем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{g}{9}s=\frac{g}{9}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (см. пример 1 п. 11) $z = C_1 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} t + C_2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{g}}{3} t$, а частное решение неоднородного уравнения $S = -1$.

Поэтому общее решение нашего уравнения

$$s = C_1 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} t + C_2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{g}}{3} t - 1.$$

Из начальных условий $\left(s = \frac{ds}{dt} = 0 \text{ при } t = 0\right)$ находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Следовательно, частным решением исходного уравнения будет функция

$$s = \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} t - 1.$$

Она определяет путь, пройденный концом опускающейся части цепи.

Когда цепь соскользнет с гвоздя, то $s = 8$, поэтому

$$8 = \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} T - 1, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} \frac{\sqrt{g}}{3} T = 9,$$

откуда

$$T = \frac{3}{\sqrt{g}} \operatorname{Arch} 9 = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln\left(9 + \sqrt{80}\right) \approx 3 \text{ сек.}$$

Движение шарика во вращающейся трубке. Задача 7. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси OA (рис. 29). Находящийся внутри трубки шарик M скользит по ней без трения. В начальный момент, шарик находится на расстоянии a от оси вращения; его начальная скорость равна нулю. Найти закон движения шарика относительно трубки.

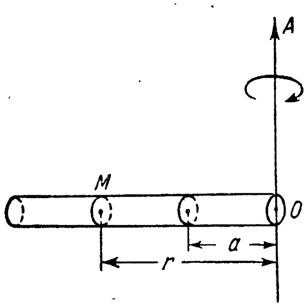

Рис. 29.

Решение. Обозначим расстояние от оси вращения до шарика через r. Задачу будем решать так, как если бы трубка оставалась неподвижной, но на шарик действовала центробежная сила $m\omega^2 r$, где

m — масса шарика. Составим дифференциальное уравнение относительного движения

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r, \text{ или } \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0.$$

Его общее решение $r = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_2 \operatorname{sh} \omega t$ (см. пример 1 п. 11).

Из начальных условий $\left(r = a \text{ и } \frac{dr}{dt} = 0 \text{ при } t = 0\right)$ находим $C_1 = a$ и $C_2 = 0$.

Поэтому закон относительного движения шарика будет

$$r = a \operatorname{ch} \omega t.$$

Если изменить начальные условия, предположив, что в начальный момент шарик находится на оси вращения и имеет скорость v_0 (вдоль трубки), т. е. $r = 0$ и $\frac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$, то $C_1 = 0$ и $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$, и частное решение примет вид

$$r = \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

Задача 8. Решить предыдущую задачу в предположении, что шарик прикреплен к точке O пружиной. Сила действия пружины на шарик пропорциональна деформации, причем сила в k *дин* вызывает изменение длины пружины на 1 *см*. Длина пружины в свободном состоянии l. Масса шарика равна m.

Решение. По условию задачи сила f действия пружины на шарик связана с деформацией δ равенством $f = c\delta$, где c — коэффициент, подлежащий определению. Так как $\delta = 1$ при $f = k$, то $c = k$, и потому $f = k\delta$, но $\delta = r - l$, следовательно, сила действия пружины $f = k(r - l)$.

Суммарная величина F действующих на шарик сил равна $F = m\omega^2 r - k(r - l)$. Поэтому дифференциальное уравнение имеет вид

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r - k(r - l), \text{ или } \frac{d^2r}{dt^2} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) r = \frac{kl}{m}.$$

Начальные условия: $r = l$ и $\frac{dr}{dt} = 0$ при $t = 0$.

Характеристическое уравнение имеет корнями числа $\pm\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}$.

Рассмотрим три возможных случая.

1. $k<m\omega^2$; обозначим $\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}=\beta$. Уравнение запишется так:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\beta^2r=\frac{kl}{m}.$$

Общее решение z соответствующего однородного уравнения

$$z=C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t;$$

частное решение R неоднородного уравнения, как легко видеть, будет

$$R=-\frac{kl}{m\omega^2-k},$$

и потому общее решение r неоднородного уравнения можно представить в виде

$$r=C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{kl}{m\omega^2-k}.$$

Из начальных условий находим, что $C_1=\frac{lm\omega^2}{m\omega^2-k}$ и $C_2=0$. Следовательно, закон относительного движения шарика в этом случае будет

$$r=\frac{l}{m\omega^2-k}\left(m\omega^2\operatorname{ch}t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}-k\right).$$

2. $k=m\omega^2$; уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{kl}{m},$$

откуда $\frac{dr}{dt}=\frac{kl}{m}t+C_1$ и $r=\frac{kl}{2m}t^2+C_1t+C_2$. Из начальных условий находим $C_2=l$, $C_1=0$. Следовательно, закон движения

$$r=l\left(1+\frac{k}{2m}t^2\right).$$

3. $k > m\omega^2$; введем обозначение $\frac{k}{m} - \omega^2 = \alpha^2$; уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \alpha^2 r = \frac{kl}{m}.$$

Общее решение z однородного уравнения:

$$z = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t,$$

частное решение R неоднородного уравнения легко найти:

$$R = \frac{kl}{k - m\omega^2}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$r = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t + \frac{kl}{k - m\omega^2}.$$

Из начальных условий находим $C_1 = -\frac{lm\omega^2}{k - m\omega^2}$, $C_2 = 0$. Следовательно, закон движения:

$$r = \frac{l}{k - m\omega^2}\left(k - m\omega^2 \cos t \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\right).$$

Задача 9. Трубка вращается с угловой скоростью 2 *рад/сек* (см. условия задачи 7); в ней находятся два шарика с массами $m_1 = 300$ *г* и $m_2 = 200$ *г*, соединенные легкой упругой пружиной длиной $l = 10$ *см*, причем в начальный

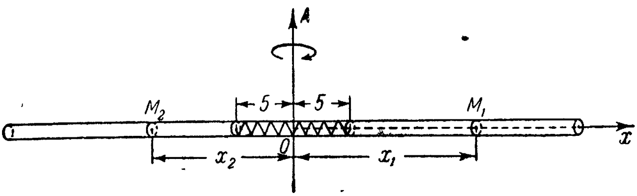

Рис. 30.

момент пружина не растянута и шарики одинаково удалены от оси вращения (рис. 30). Сила 24 000 *дн* растягивает пружину на 1 *см*. Шарики удерживаются в указанном положении некоторым механизмом. В начальный момент времени действие механизма прекращается, и шарики приходят в движение. Найти закон движения каждого шарика относительно трубки.

Решение. Обозначим через x_1 координату более тяжелого шарика (относительно трубки) и через x_2 — более легкого, причем отсчет будем вести от оси вращения, а ось Ox направим так, как показано на рис. 30.

Если, согласно условию задачи, принять $f = k\delta$, где f — сила действия пружины на каждый из шариков, а δ — деформация пружины, то $k = 24\,000$.

Составим дифференциальные уравнения относительного движения каждого из шариков:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2 - 10),$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2\omega^2 x_2 + k(x_1 - x_2 - 10).$$

Эту систему дифференциальных уравнений удобно решать так. Путем сложения обеих частей первого уравнения с соответствующими частями второго получим:

$$m_1x_1'' + m_2x_2'' = \omega^2(m_1x_1 + m_2x_2),$$

Обозначив $m_1x_1 + m_2x_2 = u$, получим уравнение $u'' - \omega^2 u = 0$. Его общее решение $u = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_2 \operatorname{sh} \omega t$ или $3x_1 + 2x_2 = \bar{C}_1 \operatorname{ch} 2t + \bar{C}_2 \operatorname{sh} 2t$, где принято, согласно условию, $\omega = 2$ и положено $\frac{C_1}{100} = \bar{C}_1$ и $\frac{C_2}{100} = \bar{C}_2$.

Начальные условия таковы: $x_1 = 5$, $x_1' = 0$, $x_2 = -5$, $x_2' = 0$ при $t = 0$.

Вычислим $3x_1' + 2x_2' = 2(\bar{C}_1 \operatorname{sh} 2t + \bar{C}_2 \operatorname{ch} 2t)$ и подставим сюда, а также в выражение $3x_1 + 2x_2$ начальные условия. Получим $\bar{C}_1 = 5$, $\bar{C}_2 = 0$ и, следовательно,

$$3x_1 + 2x_2 = 5 \operatorname{ch} 2t.$$

Отсюда находим

$$x_2 = \frac{5}{2} \operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2} x_1 \tag{8}$$

и подставляем в первое из системы дифференциальных уравнений, преобразованных к виду

$$x_1'' = (4-80)\,x_1 + 80x_2 + 800,$$
$$x_2'' = 120x_1 + (4-120)\,x_2 - 1200.$$

Подстановка исключает переменное x_2 и приводит к уравнению, содержащему только x_1 и x_1'':

$$x_1'' = -76x_1 + 80\left(\frac{5}{2}\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}x_1\right) + 800,$$

или

$$x_1'' + 196x_1 = 200 \operatorname{ch} 2t + 800.$$

Решая это уравнение, получим общее решение однородного уравнения $z = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t$, а частное решение X неоднородного уравнения будем искать в виде

$$X = A \operatorname{ch} 2t + B.$$

Так как при этом $X'' = 4A \operatorname{ch} 2t$, то, подставив X и X'' в дифференциальное уравнение, получим тождество

$$200A \operatorname{ch} 2t + 196B = 200 \operatorname{ch} 2t + 800,$$

откуда находим $A = 1$, $B = \frac{200}{49}$; следовательно, $X = \operatorname{ch} 2t + \frac{200}{49}$, и общее решение x_1 запишется в виде

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t + \operatorname{ch} 2t + \frac{200}{49}.$$

Остается определить C_1 и C_2. Начальные условия дают:

$$5 = C_1 + 1 + \frac{200}{49}, \quad \text{откуда} \quad C_1 = -\frac{4}{49};$$
$$14C_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad C_2 = 0.$$

Окончательно, имеем закон движения шарика с массой 300 *г*:

$$x_1 = \operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}.$$

Для нахождения закона движения шарика с массой 200 *г* подставим найденное выражение x_1 в равенство (8) и получим:

$$x_2 = \frac{5}{2}\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}\left(\operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}\right),$$

или

$$x_2 = \operatorname{ch} 2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{300}{49}.$$

Задача 10. Решить задачу 7 с учетом трения.

Решение. Величина R трения вычисляется по закону Кулона $R = \mu P$, где μ — коэффициент трения скольжения, а P — нормальное давление одного тела на другое. В нашем случае P есть сила давления шарика на стенки трубки, т. е. сила Кориолиса, равная $2m\omega v$. Поэтому $R = 2m\mu\omega\frac{dr}{dt}$.

Составляем дифференциальное уравнение относительного движения шарика:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r - 2m\mu\omega\frac{dr}{dt}.$$

Преобразовав его к виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 2\mu\omega\frac{dr}{dt} - \omega^2 r = 0,$$

замечаем, что получилось уравнение, рассмотренное в примере 3 п. 11. Его общее решение:

$$r = e^{-\mu\omega t}\left(C_1 \operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t + C_2 \operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t\right).$$

Вычислим производную

$$\frac{dr}{dt} = e^{-\mu\omega t}\left[-\mu\omega\left(C_1 \operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t + C_2 \operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t\right)\right] + \\ + e^{-\mu\omega t}\left[\omega\sqrt{1+\mu^2}\left(C_1 \operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t + C_2 \operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t\right)\right]$$

и подставим в выражение r и $\frac{dr}{dt}$ их значения из начальных условий ($r = a$ и $\frac{dr}{dt} = 0$ при $t = 0$). Имеем $C_1 = a$, $-\mu\omega a + \omega\sqrt{1+\mu^2}\,C_2 = 0$, откуда $C_2 = \frac{a\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

В соответствии с этим частное решение принимает вид

$$r = ae^{-\mu\omega t}\left(\operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}\,t\right).$$

Включение электродвижущей силы в контур. Задача 11. Постоянная электродвижущая сила E включается в контур, состоящий из последовательно соединенных катушки с индуктивностью L, сопротивления R и емкости C (рис. 31).

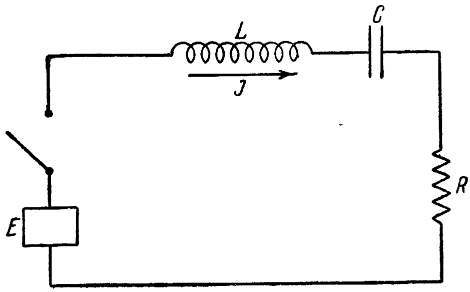

Рис. 31.

Найти силу тока I в любой момент времени t, если в начальный момент сила тока I_0 в контуре и заряд конденсатора Q_0 равны нулю.

Решение. На основании закона Кирхгофа (учитывая, что $Q_0 = 0$) составляем уравнение

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt = E.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения по t, получим линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

Его характеристическое уравнение $r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{CL} = 0$ имеет корни $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta$, где приняты обозначения:

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}>0$. Общее решение (см. пример 3 п. 11)

$$I=e^{-\alpha t}(C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t).$$

Для определения C_1 и C_2 используем начальные условия. Первое условие $I|_{t=0}=0$ дает $C_1=0$ и, следовательно,

$$I=C_2e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t.$$

Второе условие получим, если положим $t=0$ в исходном уравнении, что дает

$$L\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}=E. \tag{9}$$

Вычислим производную $\frac{dI}{dt}$ и подставим ее в последнее равенство. Имеем

$$\frac{dI}{dt}=C_2e^{-\alpha t}(-\alpha\operatorname{sh}\beta t+\beta\operatorname{ch}\beta t);\quad \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}=C_2\beta.$$

Поэтому $C_2\beta L=E$, откуда $C_2=\frac{E}{\beta L}$.

Окончательное искомое частное решение нашего уравнения будет

$$I=\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t.$$

2. $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}<0$; в этом случае $\beta=i\omega$, где $i=\sqrt{-1}$, а $\omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}$ — вещественное число.

Общее решение уравнения:

$$I=e^{-\alpha t}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t).$$

Используем начальные условия. Первое условие $(I|_{t=0}=0)$ дает $C_1=0$, и потому решение принимает вид $I=C_2e^{-\alpha t}\sin\omega t$. Вычислим производную $\frac{dI}{dt}=C_2e^{-\alpha t}(-\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t)$. Так как $\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}=C_2\omega$, то условие (9) дает $C_2\omega L=E$, откуда

$C_2=\frac{E}{\omega L}$ и, следовательно, окончательно

$$I=\frac{E}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t.$$

3. $\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}=0$; в этом случае общее решение имеет вид

$$I=e^{-\alpha t}(C_1+C_2 t).$$

Первое начальное условие дает $C_1=0$, и потому $I=$ $=C_2te^{-\alpha t}$. Так как $\frac{dI}{dt}=C_2e^{-\alpha t}(-\alpha t+1)$, то $\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0}=C_2$, и равенство (9) переходит в $C_2L=E$, откуда $C_2=\frac{E}{L}$.

Окончательно частное решение уравнения в этом случае

$$I=\frac{E}{L}te^{-\alpha t}.$$

Задача 12. Индуктивность L, емкость C и сопротивление R соединены согласно схеме, изображенной на рис. 32.

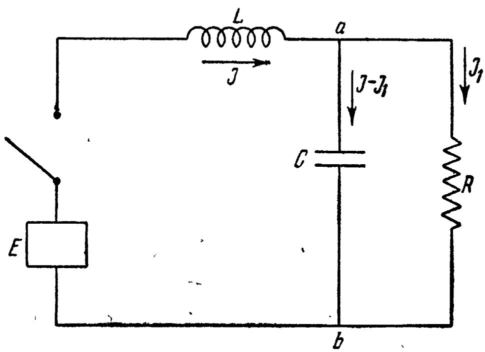

Рис. 32.

В контур включается постоянная электродвижущая сила E, причем до ее включения токи и заряды в системе отсутствовали. Найти силу тока I, протекающего в катушке самоиндукции, как функцию времени t.

Решение. Обозначим через I_1 силу тока в цепи aRb и составим систему уравнений задачи на основании закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (I-I_1)dt=E, \\ RI_1-\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t (I-I_1)\,dt=0. \end{cases} \tag{10}$$

Исключим из этой системы I_1. Сложив соответствующие части обоих уравнений, получим:

$$L\frac{dI}{dt}+RI_1=E. \tag{11}$$

Если продифференцировать по t обе части первого из уравнений (10), то получим:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I-\frac{1}{C}I_1=0,$$

откуда

$$I_1=CL\frac{d^2I}{dt^2}+I.$$

При подстановке I_1 в уравнение (11) будем иметь:

$$L\frac{dI}{dt}+CLR\frac{d^2I}{dt^2}+RI=E$$

или уравнение

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{CL}I=\frac{E}{CLR}, \tag{12}$$

в котором I_1 отсутствует.

Будем решать уравнение (12). Корни его характеристического уравнения равны $r_{1,2}=-\alpha\pm\beta$, причем

$$\frac{1}{2CR}=\alpha, \qquad \sqrt{\alpha^2-\frac{1}{CL}}=\beta.$$

Предположим сперва, что $\alpha^2>\frac{1}{CL}$. Тогда общее решение z соответствующего однородного уравнения будет (см.

пример 3 п. 11)

$$z = e^{-\alpha t}(C_1 \operatorname{ch} \beta t + C_2 \operatorname{sh} \beta t).$$

Частное решение $\overline{I}$ неоднородного уравнения (12) будем искать в виде $\overline{I} = A$. Тогда $\overline{I}' = \overline{I}'' = 0$ и $\frac{1}{CL} A = \frac{E}{CLR}$, откуда $A = \frac{E}{R}$.

Следовательно, $\overline{I} = \frac{E}{R}$, а общее решение уравнения (12), равное сумме $\overline{I} + z$, будет

$$I = \frac{E}{R} + e^{-\alpha t}(C_1 \operatorname{ch} \beta t + C_2 \operatorname{sh} \beta t). \tag{13}$$

Определим C_1 и C_2 из начальных условий. Так как $I = 0$ при $t = 0$, то из (13) получим $\frac{E}{R} + C_1 = 0$, откуда $C_1 = -\frac{E}{R}$, и потому $I = \frac{E}{R} + e^{-\alpha t}\left(C_2 \operatorname{sh} \beta t - \frac{E}{R} \operatorname{ch} \beta t\right)$.

Вычислим $\frac{dI}{dt}$. Имеем:

$$\frac{dI}{dt} = e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(C_2 \operatorname{sh} \beta t - \frac{E}{R} \operatorname{ch} \beta t\right) + \beta\left(C_2 \operatorname{ch} \beta t - \frac{E}{R} \operatorname{sh} \beta t\right)\right].$$

Положив здесь $t = 0$, получим:

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\alpha E}{R} + \beta C_2.$$

Теперь можно определить и C_2. Учитывая, что при $t = 0$ не только $I = 0$, но и $I_1 = 0$, из уравнения (11) получим:

$$\frac{L\alpha E}{R} + L\beta C_2 = E,$$

откуда

$$C_2 = \frac{E}{L\beta}\left(1 - \frac{L\alpha}{R}\right) = \frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L} - \alpha\right).$$

Окончательно частное решение I для случая $\alpha^2 > \frac{1}{CL}$ запишется так:

$$I = \frac{E}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch} \beta t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{R}{L\beta}\right) \operatorname{sh} \beta t\right]\right\}.$$

Теперь предположим, что $\alpha^2 < \frac{1}{CL}$. Тогда β — мнимое число, и мы положим $\beta = i\omega$, где вещественное число $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \alpha^2}$.

В этом случае совершенно аналогично получим частное решение I в виде

$$I = \frac{E}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} - \frac{R}{L\omega}\right)\sin\omega t\right]\right\}.$$

Задача 13. Постоянная электродвижущая сила E включается в цепь, состоящую из двух индуктивно связанных контуров, изображенных на рис. 33. Найти силы тока I_1

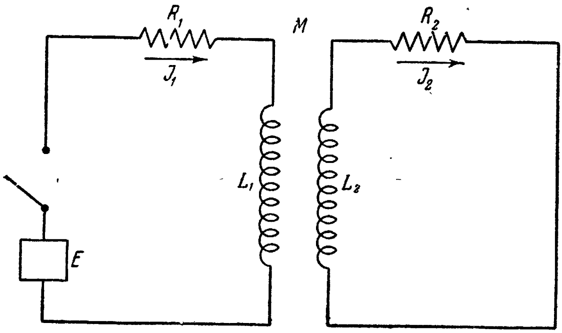

Рис. 33.

и I_2 в обоих контурах в зависимости от времени t, если включение производится при нулевых начальных условиях.

Решение. Согласно закону Кирхгофа, составляем систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1I_1 + M\frac{dI_2}{dt} &= E, \\ L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2I_2 + M\frac{dI_1}{dt} &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (14)$$

Здесь M — коэффициент взаимной индукции контуров, остальные обозначения такие же, как и в предыдущей задаче.

Из системы уравнений (14) исключим $\frac{dI_2}{dt}$. Для этого умножим обе части первого уравнения на L_2, а второго — на $-M$ и сложим их. Будем иметь:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{dI_1}{dt} + L_2R_1I_1 - MR_2I_2 = L_2E$$

или

$$(1-k^2)\frac{dI_1}{dt} + 2\alpha_1 I_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}I_2 = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}, \tag{15}$$

что получилось в результате деления обеих частей предыдущего уравнения на L_1L_2 и замены $\frac{M^2}{L_1L_2} = k^2$, $\frac{R_1}{L_1} = 2\alpha_1$, $\frac{R_2}{L_2} = 2\alpha_2$.

Продифференцируем обе части уравнения, найдем выражение $\frac{dI_2}{dt}$ и подставим его в первое из уравнений (14):

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{R_1(1-k^2)}{4M\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2I_1}{dt^2} + \frac{R_1}{2M\alpha_2}\frac{dI_1}{dt};$$

$$\frac{R_1(1-k^2)}{4\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2I_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{2\alpha_2} + \frac{R_1}{2\alpha_1}\right)\frac{dI_1}{dt} + R_1I_1 = E.$$

Разделим обе части полученного уравнения на коэффициент при $\frac{d^2I_1}{dt^2}$; будем иметь:

$$\frac{d^2I_1}{dt^2} + \frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-k^2}\frac{dI_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}I_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)},$$

или

$$\frac{d^2I_1}{dt^2} + 2\sigma\frac{dI_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}I_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}, \tag{16}$$

где положено

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-k^2} = \sigma.$$

Так как корни характеристического уравнения $r_{1,2} = -\sigma \pm \beta$, где положено $\sqrt{\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}} = \beta$, то общее решение z соответствующего однородного дифференциального уравнения (см. пример 3 п. 11):

$$z = e^{-\sigma t}(C_1 \operatorname{ch} \beta t + C_2 \operatorname{sh} \beta t). \tag{17}$$

Найдем методом неопределенных коэффициентов частное решение $\overline{I}_1$ неоднородного уравнения. Пусть $\overline{I}_1 = A$, где A — подлежащий определению коэффициент.

Так как $\frac{d\overline{I}_1}{dt} = 0$ и $\frac{d^2\overline{I}_1}{dt^2} = 0$, то дифференциальное уравнение (16) переходит в алгебраическое уравнение относительно A:

$$\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} A = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}, \tag{18}$$

откуда $A = \frac{E}{R_1}$.

Итак, $\overline{I}_1 = \frac{E}{R_1}$, а следовательно, общее решение уравнения (16) будет иметь вид

$$I_1 = e^{-\sigma t}(C_1 \operatorname{ch} \beta t + C_2 \operatorname{sh} \beta t) + \frac{E}{R_1}. \tag{19}$$

Для определения произвольных постоянных используем начальные условия: $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$ при $t = 0$.

Подстановка первого из них в решение (19) сразу дает $C_1 = -\frac{E}{R_1}$. Поэтому решение (19) запишется так:

$$I_1 = e^{-\sigma t}\left(C_2 \operatorname{sh} \beta t - \frac{E}{R_1} \operatorname{ch} \beta t\right) + \frac{E}{R_1}.$$

Возьмем производную

$$\frac{dI_1}{dt} = e^{-\sigma t}\left[-\sigma\left(C_2 \operatorname{sh} \beta t - \frac{E}{R_1} \operatorname{ch} \beta t\right) + \beta\left(C_2 \operatorname{ch} \beta t - \frac{E}{R_1} \operatorname{sh} \beta t\right)\right]$$

и вычислим ее значение при $t = 0$; имеем:

$$\left.\frac{dI_1}{dt}\right|_{t=0} = \sigma\frac{E}{R_1} + C_2\beta.$$

Подставив найденное значение производной и значения $I_1 = I_2 = 0$ из начальных условий в уравнение (15), получим уравнение для определения C_2:

$$(1-k^2)\left(\frac{\sigma E}{R_1} + C_2\beta\right) = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}.$$

Учитывая, что $\sigma=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-k^2}$, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{R_1}+C_2\beta(1-k^2)=\frac{2\alpha_1 E}{R_1},$$

откуда

$$C_2=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)E}{\beta(1-k^2)R_1}.$$

Окончательно частное решение I_1 запишется так:

$$I_1=\frac{E}{R_1}+\frac{Ee^{-\sigma t}}{R_1}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta(1-k^2)}\operatorname{sh}\beta t-\operatorname{ch}\beta t\right].$$

Аналогичным образом можно найти частное решение I_2.

Установившееся распределение температуры в стержне. Задача 14. Концы тонкого однородного призматического стержня длиной l поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2. Площадь и периметр поперечного сечения стержня равны соответственно σ и p. Температура окружающей среды T_0. Коэффициент теплопроводности стержня, зависящий от его вещества, k. Коэффициент теплоотдачи от стержня к окружающей среде μ. Найти установившееся (т. е. не зависящее от времени) распределение температуры в стержне.

Решение. Выберем начало отсчета на левом конце стержня и направим ось Ox по оси стержня (рис. 34). Выделим бесконечно малый элемент стержня dx между двумя

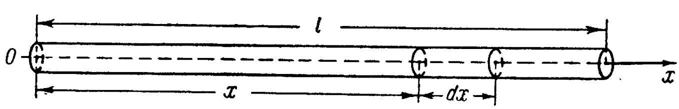

Рис. 34.

сечениями x и $x+dx$. Согласно основному допущению теории теплопроводности, *тепловой поток через элементарную площадку в направлении Ox при установившейся температуре пропорционален площади σ и скорости падения температуры в направлении Ox — температурному* *градиенту* $\frac{dT}{dx}$:

$$Q = -k\sigma \frac{dT}{dx}$$

(знак минус берется потому, что тепло распространяется от более нагретой части стержня к менее нагретой, так что $Q > 0$ в том именно случае, когда температура T в направлении Ox падает, т. е. когда $\frac{dT}{dx} < 0$, и наоборот, $Q < 0$, когда $\frac{dT}{dx} > 0$). Поэтому количество тепла Q, которое пройдет через первое сечение x за единицу времени, равно $Q = -k\sigma \frac{dT}{dx}$, а через второе сечение $x + dx$ пройдет количество тепла $Q + dQ = -k\sigma\left[\frac{dT}{dx} + d\left(\frac{dT}{dx}\right)\right]$. Следовательно, если бы не было теплоотдачи в окружающую среду, то в выделенном элементе задержалось бы количество тепла $-dQ = k\sigma \frac{d^2T}{dx^2}\, dx$.

Согласно закону Ньютона, *количество тепла, отдаваемое элементом поверхности при температуре T окружающей среде температуры T_0 за время dt, пропорционально площади* (в нашем случае $p\, dx$), *времени dt и разности температур $T - T_0$* *). Это количество тепла за единицу времени составляет $\mu p\, dx (T - T_0)$ (мы полагаем стержень настолько тонким, что теплоотдачей через площади концов стержня можно пренебречь), и оно равно $-dQ$, вычисленному выше. Приравнивая друг другу эти величины, получаем дифференциальное уравнение

$$k\sigma \frac{d^2T}{dx^2}\, dx = \mu p (T - T_0)\, dx$$

или

$$\frac{d^2T}{dx^2} - a^2 (T - T_0) = 0, \text{ где положено } \frac{\mu p}{k\sigma} = a^2.$$

---

*) Закон Ньютона приближенный, он справедлив только при небольших разностях температур $T - T_0$.

Если обозначить $T-T_0=y$, то мы приходим к уравнению $y''-a^2y=0$. Его общее решение (см. пример 1 п. 11):

$$T-T_0=C_1\operatorname{ch} ax+C_2\operatorname{sh} ax.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий

$$T\big|_{x=0}=T_1 \quad \text{и} \quad T\big|_{x=l}=T_2.$$

Имеем:

$$C_1=T_1-T_0, \qquad C_2=\frac{(T_2-T_0)-(T_1-T_0)\operatorname{ch} al}{\operatorname{sh} al},$$

и следовательно, частным решением будет

$$T-T_0=(T_1-T_0)\operatorname{ch} ax+\frac{(T_2-T_0)-(T_1-T_0)\operatorname{ch} al}{\operatorname{sh} al}\operatorname{sh} ax.$$

Правую часть можно преобразовать, приведя ее к общему знаменателю:

$$\frac{(T_1-T_0)(\operatorname{sh} al\operatorname{ch} ax-\operatorname{ch} al\operatorname{sh} ax)+(T_2-T_0)\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} al}=$$
$$=\frac{(T_1-T_0)\operatorname{sh} a(l-x)+(T_2-T_0)\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} al}.$$

Таким образом, температура в стержне распределяется по закону

$$T-T_0=\frac{(T_1-T_0)\operatorname{sh} a(l-x)+(T_2-T_0)\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} al}.$$

Произведем числовой расчет. Пусть $p/\sigma=72{,}5$; $k=330$; $\mu=10$; $a=\sqrt{\mu p/k\sigma}=1{,}48$; $l=1$; $T_0=0$; $T_1=200$; $T_2=100$.

Из таблиц гиперболических функций находим $\operatorname{sh} al=\operatorname{sh} 1{,}48=2{,}083$, и потому

$$T=47{,}9\operatorname{sh} 1{,}48x+95{,}8\operatorname{sh} 1{,}48(1-x).$$

Для этой функции можно составить таблицу и построить график (рис. 35).

x (*м*)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
y (°C)	200,0	156,3	126,7	108,4	99,4	99,2	100,0

Исследование функции T показывает, что минимум ее находится вблизи менее нагретого конца стержня. Чем больше значение a, тем более резким будет этот минимум.

При $a=0$ дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0,$$

его общее решение $T=C_1x+C_2$ представляет собой семейство прямых.

Предположим, что температура окружающей среды $T_0=0$, и вычислим количество тепла, отдаваемое стержнем среде за единицу времени.

Элемент dx стержня отдает тепло в количестве

$$dQ=\mu pT\,dx=\mu p\,\frac{T_1\operatorname{sh}a(l-x)+T_2\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}al}\,dx,$$

а количество тепла, отдаваемое всем стержнем, равно

$$Q=\frac{\mu p}{\operatorname{sh}al}\int_0^l[T_1\operatorname{sh}a(l-x)+T_2\operatorname{sh}ax]\,dx=$$

$$=\frac{\mu p}{a\operatorname{sh}al}\left[-T_1\operatorname{ch}a(l-x)+T_2\operatorname{ch}ax\right]_0^l=$$

$$=\frac{\mu p}{a\operatorname{sh}al}\left[T_1(\operatorname{ch}al-1)+T_2(\operatorname{ch}al-1)\right]=$$

$$=\frac{\mu p(T_1+T_2)\,2\operatorname{sh}^2\frac{al}{2}}{2a\operatorname{sh}\frac{al}{2}\operatorname{ch}\frac{al}{2}}=\frac{\mu p}{a}(T_1+T_2)\operatorname{th}\frac{al}{2}.$$

Задача 15. Решить задачу 14 при условии, что температура на правом конце не задана.

Решение. Совершенно ясно, что весь ход решения предыдущей задачи остается без изменения вплоть до составления дифференциального уравнения и нахождения его решения. Расхождение имеет место только в граничных условиях, из которых сохраняется только одно $\left(T|_{x=0}=T_1\right)$, а второе предстоит установить. Для этой цели вычислим количество тепла, подводимого к концу $x=l$ стержня, $-k\sigma\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=l}$, и приравняем его количеству тепла, отдаваемого среде через сечение $x=l$ стержня, $\mu\sigma\left(T\big|_{x=l}-T_0\right)$; будем иметь:

$$\mu\left(T\big|_{x=l}-T_0\right)+k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=l}=0.$$

Это и есть второе граничное условие.

Если теперь продифференцировать общее решение уравнения и подставить в выражения T и $\frac{dT}{dx}$ их значения при $x=l$, то из последнего граничного условия найдем соотношение между C_1 и C_2. Зная C_1 из первого граничного условия, найдем из этого соотношения и C_2.

Обычно теплоотдачей через конец стержня пренебрегают, полагая ее ничтожно малой сравнительно с теплоотдачей через боковую поверхность стержня. Это равносильно тому, что во втором граничном условии полагают $\mu=0$, вследствие чего оно примет вид: $\frac{dT}{dx}\Big|_{x=l}=0$ или $C_1\operatorname{sh}al+C_2\operatorname{ch}al=0$.

Из этого равенства находим:

$$C_2=-C_1\operatorname{th}al,$$

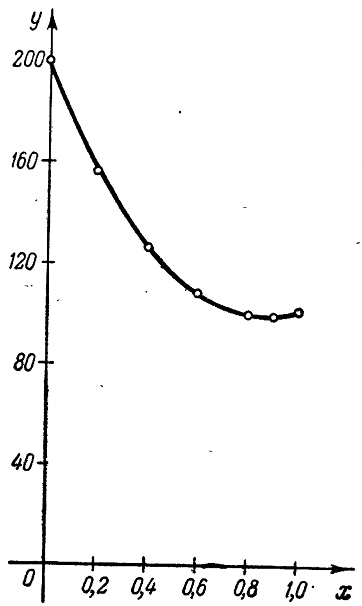

Рис. 35.

а так как $C_1=T_1-T_0$, то $C_2=-(T_1-T_0)\operatorname{th}al$ и частное решение принимает вид

$$T-T_0=(T_1-T_0)(\operatorname{ch}ax-\operatorname{th}al\operatorname{sh}ax),$$

или

$$T-T_0=(T_1-T_0)\frac{\operatorname{ch}a(l-x)}{\operatorname{ch}al}.$$

Заметим, между прочим, что если полагать стержень достаточно длинным, то $\operatorname{th} al$ очень близок к единице.

Предположим, что температура среды $T_0 = 0$, и определим температуру на правом конце стержня, т. е. при $x = l$. Общее решение в этом случае будет

$$T = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \operatorname{sh} ax.$$

Для нахождения произвольных постоянных используем граничные условия:

$$T\Big|_{x=0} = T_1, \quad \mu T\Big|_{x=l} + k\frac{dT}{dx}\Big|_{x=l} = 0.$$

Первое условие дает $C_1 = T_1$, а второе —

$$\mu (C_1 \operatorname{ch} al + C_2 \operatorname{sh} al) + ka (C_1 \operatorname{sh} al + C_2 \operatorname{ch} al) = 0,$$

или

$$(\mu \operatorname{ch} al + ka \operatorname{sh} al) C_1 + (\mu \operatorname{sh} al + ka \operatorname{ch} al) C_2 = 0,$$

откуда

$$C_2 = -T_1 \frac{\mu \operatorname{ch} al + ka \operatorname{sh} al}{\mu \operatorname{sh} al + ka \operatorname{ch} al},$$

и потому

$$T = T_1 \left(\operatorname{ch} ax - \frac{\mu \operatorname{ch} al + ka \operatorname{sh} al}{\mu \operatorname{sh} al + ka \operatorname{ch} al} \operatorname{sh} ax\right).$$

Температуру T_2 на правом конце стержня получим, если в этой формуле положим $x = l$:

$$T_2 = T_1 \left(\operatorname{ch} al - \frac{\mu \operatorname{ch} al + ka \operatorname{sh} al}{\mu \operatorname{sh} al + ka \operatorname{ch} al} \operatorname{sh} al\right) = T_1 \frac{ka}{\mu \operatorname{sh} al + ka \operatorname{ch} al}.$$

Вычислим количество тепла, отдаваемое стержнем в течение единицы времени. Очевидно, оно равно тому количеству тепла, которое пройдет за это время через начальное сечение стержня $x = 0$, а именно:

$$Q_0 = -k\sigma \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = k\sigma a (T_1 - T_0) \operatorname{th} al.$$

Произведем числовой расчет для решения следующей задачи.

Задача 16. В подшипнике вала установившаяся температура конца вала, где находится подшипник, превышает температуру воздуха на 60° С. Вычислить часовое количество тепла, отводимого вдоль вала, если длина вала $l=1$ *м*, диаметр сечения вала $d=6$ *см*, так что $\sigma=0{,}0028$ *м*^{2}, $p=0{,}189$ *м*. Кроме того, известно, что

$$\mu=6\frac{\textit{кал}}{\textit{м}^2\cdot{}^\circ\text{C}\cdot\textit{час}},\quad \text{а}\quad k=50\frac{\textit{кал}}{\textit{м}\cdot{}^\circ\text{C}\cdot\textit{час}}.$$

Решение. По формуле $a=\sqrt{\mu p/k\sigma}$ находим в нашем случае $a=2{,}85\,\frac{1}{\textit{м}}$, и искомое количество тепла

$$Q=50\cdot 0{,}0028\cdot 2{,}85\cdot 60\cdot 0{,}9933\approx 24\ \textit{кал/час}.$$

Задача о распределении температуры в стержне значительно упростится, если предположить, что стержень полуограниченный, т. е. имеет один конец, например, левый $x=0$, а вправо простирается в бесконечность. В этом случае общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2T}{dx^2}-a^2(T-T_0)=0$$

удобно взять в форме

$$T-T_0=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax},$$

а произвольные постоянные C_1 и C_2 можно определить из граничных условий $T|_{x=0}=T_1$ и $T|_{x=\infty}=T_0$.

Из второго условия заключаем, что $C_1=0$. В самом деле, $C_2e^{-ax}=0$ при $x=\infty$ и любом множителе C_2; следовательно, необходимо, чтобы при $x=\infty$ и $C_1e^{ax}=0$, а это возможно только при $C_1=0$. Обращаясь к первому условию, находим $C_2=T_1-T_0$.

Итак, частное решение будет иметь вид

$$T-T_0=(T_1-T_0)\,e^{-ax}.$$

Полученный результат можно использовать при решении следующей задачи.

Задача 17. У двух длинных круглых стержней, из которых один несколько толще другого, на одном конце поддерживается температура T_1. Оба стержня сделаны из одного и того же материала и оба отдают часть тепла в окружающий воздух постоянной температуры T_0. Какой из них будет теплее на расстоянии единицы длины от нагретого конца?

Решение. На основании предыдущего имеем для более тонкого стержня закон распределения температуры

$$T^{(1)}-T_0=(T_1-T_0)\,e^{-a_1x},$$

где

$$a_1=\sqrt{\frac{\mu p_1}{k\sigma_1}}=\sqrt{\frac{2\mu}{kr_1}}$$

(периметр сечения стержня $p_1=2\pi r_1$; площадь сечения $\sigma_1=\pi r_1^2$, где r_1 — радиус), а для более толстого стержня $T^{(2)}-T_0=(T_1-T_0)\,e^{-a_2x}$, где $a_2=\sqrt{2\mu/kr_2}$ (r_2 — радиус сечения толстого стержня).

Возьмем отношение

$$\frac{T^{(2)}-T_0}{T^{(1)}-T_0}=e^{(a_1-a_2)\,x}$$

и положим в нем $x=1$, одновременно заменив a_1 и a_2 их выражениями через r_1 и r_2.

Тогда

$$\frac{T^{(2)}-T_0}{T^{(1)}-T_0}=e^{\sqrt{\frac{2\mu}{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}-\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)}=e^{\sqrt{\frac{2\mu}{k}}\,\frac{\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1r_2}}}.$$

Так как $r_2>r_1$, то $\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1}>0$, и показатель степени в правой части положительный. Отсюда следует, что правая часть больше единицы; значит,

$$\frac{T^{(2)}-T_0}{T^{(1)}-T_0}>1,\qquad \text{или}\qquad T^{(2)}>T^{(1)},$$

т. е. на расстоянии единицы от нагретого конца температура более толстого стержня выше температуры более тонкого.

Ионизация газа. Задача 18. При ионизирующем действии постоянного излучения в газовой среде за одну секунду образуется q положительных и столько же отрицательных ионов в данном объеме газа. Вследствие того что положительные и отрицательные ионы снова соединяются между собой (рекомбинируют), количество их убывает.

Принимая, что из общего числа n положительных ионов в каждую секунду рекомбинирует часть в количестве, пропорциональном n^2 (коэффициент пропорциональности α зависит от природы и состояния газа), найти зависимость между количеством ионов n и временем t.

Решение. Составляем дифференциальное уравнение процесса ионизации; согласно условию задачи:

$$\frac{dn}{dt}=q-\alpha n^2.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделение переменных приводит его к виду

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dn}{n^2-\frac{q}{\alpha}}+dt=0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha q}}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{\alpha}{q}}\,n+t=-\frac{1}{\sqrt{\alpha q}}C,$$

откуда

$$\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{\alpha}{q}}\,n=\sqrt{\alpha q}\,t+C$$

или

$$n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}\operatorname{th}\left(\sqrt{\alpha q}\,t+C\right).$$

Так как $n=0$ при $t=0$, то $C=0$, и частное решение, определяющее искомую зависимость числа ионов n от времени t, принимает вид

$$n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}\operatorname{th}\left(\sqrt{\alpha q}\,t\right).$$

Диффузия, сопровождаемая химической реакцией. Задача 19. При поглощении газа раствором процесс диффузии газа в раствор происходит стационарно и сопровождается химической реакцией, скорость которой пропорциональна концентрации растворенного в жидкости газа, а скорость диффузии пропорциональна градиенту концентрации.

Найти концентрацию γ растворенного в жидкости газа как функцию толщины x диффузионного слоя, считая от плоскости раздела газа с жидкостью. Концентрация γ и градиент концентрации γ' в точках раздела фаз $x=0$ равны соответственно γ_0 и γ_0'; коэффициент диффузии — D, коэффициент скорости реакции — k (D и k — постоянные).

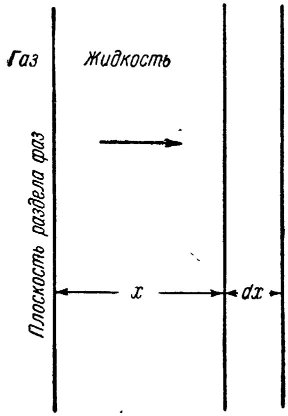

Рис. 36.

Решение. Представим себе диффузионный слой жидкости, примыкающий к межфазовой границе газ — жидкость (рис. 36). В любой части плоскости, перпендикулярной к направлению диффузии, условия процесса одинаковы.

Скорость диффузии в точках плоскости, отстоящей от плоскости раздела фаз на расстоянии x, равна $-D\frac{d\gamma}{dx}$; знак минус берется потому, что концентрация уменьшается в направлении диффузионного потока. За время dt количество газа, продиффундировавшего через единичную площадку, равно $-D\frac{d\gamma}{dx}\Big|_x dt$, а через границу элементарного слоя, отстоящего от плоскости раздела фаз на $x+dx$:

$$-D\frac{d\gamma}{dx}\Big|_{x+dx} dt = -D\left[\frac{d\gamma}{dx}\Big|_x + d\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)\right]dt.$$

Поэтому количество диффундирующего газа, вступившего в химическую реакцию, в элементарном объеме равно

$$Q = Dd\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)dt = D\frac{d^2\gamma}{dx^2}dx\,dt.$$

Это же количество газа может быть подсчитано и другим способом, как произведение скорости химической реакции $k\gamma$.

на объем элемента, равный dx (площадь его равна единице), и на dt, т. е. $Q = k\gamma\, dx\, dt$.

Приравнивая друг другу оба выражения для Q, составляем дифференциальное уравнение

$$D\frac{d^2\gamma}{dx^2}\,dx\,dt = k\gamma\,dx\,dt,$$

или $\frac{d^2\gamma}{dx^2} - a^2\gamma = 0$, где положено $\frac{k}{D} = a^2$.

Его общее решение (см. пример 1 п. 11):

$$\gamma = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \operatorname{sh} ax.$$

Для определения C_1 и C_2 используем начальные условия: $\gamma = \gamma_0$ и $\frac{d\gamma}{dx} = \gamma_0'$ при $x = 0$. Вычислим производную

$$\frac{d\gamma}{dx} = a(C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax)$$

и подставим в выражения γ и $\frac{d\gamma}{dx}$ их значения при $x = 0$, получим $C_1 = \gamma_0$ и $C_2 = \frac{\gamma_0'}{a}$, и следовательно, изменение концентрации газа по толщине диффузионного слоя дается формулой

$$\gamma = \gamma_0 \operatorname{ch} ax + \frac{\gamma_0'}{a}\operatorname{sh} ax.$$

Частное решение можно получить и из других граничных условий, когда задана концентрация газа в пограничном слое $x = 0$ и в слое $x = l$, расположенном на расстоянии l от пограничного слоя: $\gamma = \gamma_0$ при $x = 0$ и $\gamma = \gamma_1$ при $x = l$.

Тогда, подставляя в выражение γ из общего решения его значения при $x = 0$ и $x = l$, получим $C_1 = \gamma_0$, как раньше, и $\gamma_1 = \gamma_0 \operatorname{ch} al + C_2 \operatorname{sh} al$, откуда $C_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma_0 \operatorname{ch} al}{\operatorname{sh} al}$, а следовательно,

$$\gamma=\gamma_0 \operatorname{ch} ax+\frac{\gamma_1-\gamma_0 \operatorname{ch} al}{\operatorname{sh} al}\operatorname{sh} ax.$$

Преобразовав правую часть, приведя ее к общему знаменателю и использовав формулу для гиперболического синуса разности аргументов, получим:

$$\gamma=\frac{\gamma_1 \operatorname{sh} ax+\gamma_0 \operatorname{sh} a(l-x)}{\operatorname{sh} al}.$$

Размножение бактерий. Задача 20. Предполагая, что бактерии размножаются пропорционально их наличному количеству, но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их пропорционально количеству яда и количеству бактерий, причем скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий, показать, что число бактерий N сначала возрастает до некоторого наибольшего значения M, а затем убывает до нуля и в момент времени t определяется формулой

$$N=\frac{M}{\operatorname{ch}^2 \frac{kt}{2}},$$

где время t измеряется от того момента, когда $N=M$.

Решение. Обозначим количество яда через x и, согласно условию задачи, составим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dN}{dt}&=kN-k_1Nx,\\ \frac{dx}{dt}&=k_2N. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Здесь $\frac{dN}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ — соответственно скорость размножения бактерий и скорость выработки яда, а k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Разделив обе части первого уравнения системы (20) на соответствующие части второго, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dN}{dx}=\frac{k}{k_2}-\frac{k_1}{k_2}x,$$

откуда

$$N=\frac{k}{k_2}x-\frac{k_1}{2k_2}x^2+C.$$

Так как $x=0$ при $N=0$, то $C=0$, и таким образом, связь между числом бактерий и количеством яда устанавливается формулой

$$N=ax-bx^2, \tag{21}$$

где положено

$$\frac{k}{k_2}=a,\quad \frac{k_1}{2k_2}=b. \tag{22}$$

График функции $N(x)$ представляет собой параболу, проходящую через начало координат и через точку $A\left(\frac{a}{b},\ 0\right)$, с осью симметрии, параллельной оси ON, и с вершиной в точке $O_1\left(\frac{a}{2b},\ \frac{a^2}{4b}\right)$.

Следовательно,

$$N_{\max}=M=\frac{a^2}{4b}=\frac{k^2}{2k_1k_2}. \tag{23}$$

Найдем теперь зависимость количества бактерий от времени t. Для этого преобразуем равенство (21) к виду

$$bx^2-ax+N=0$$

и разрешим его относительно x; получим:

$$x=\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4b^2}-\frac{N}{b}}.$$

Это выражение x через N подставим в первое из уравнений (20); будем иметь:

$$\frac{dN}{dt}=kN-\frac{k_1a}{2b}N\mp k_1N\sqrt{\frac{a^2}{4b^2}-\frac{N}{b}}. \tag{24}$$

Принимая во внимание соотношения (22) и (23), замечаем что первые два члена в правой части взаимно уничтожаются.

а последний равен $\mp kN\sqrt{1-\frac{N}{M}}$. Поэтому уравнение (24) запишется так:

$$\frac{dN}{dt}=\mp kN\sqrt{1-\frac{N}{M}},$$

а это есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных оно приводится к виду

$$\frac{dN}{N\sqrt{1-\frac{N}{M}}}=\mp k\,dt. \tag{25}$$

Интеграл $J=\int\frac{dN}{N\sqrt{1-\frac{N}{M}}}$ вычислим с помощью подстановки $\sqrt{1-\frac{N}{M}}=y$, из которой следует, что $N=$ $=M(1-y^2)$, а $dN=-2My\,dy$. Поэтому $J=-2\int\frac{dy}{1-y^2}=$ $=-2\operatorname{Arth}y+C_1=-2\operatorname{Arth}\sqrt{1-\frac{N}{M}}+C_1$, так как $0<\frac{N}{M}<1$, и следовательно, $y=\sqrt{1-\frac{N}{M}}<1$.

Таким образом, общий интеграл уравнения (25) будет

$$-2\operatorname{Arth}\sqrt{1-\frac{N}{M}}+C_1=\pm kt.$$

Произвольную постоянную C_1 определим из начального условия $N=M$ при $t=0$, которое дает $C_1=0$, и, значит, частный интеграл уравнения (25) будет

$$2\operatorname{Arth}\sqrt{1-\frac{N}{M}}=\pm kt,$$

или

$$\operatorname{th}\frac{kt}{2}=\pm\sqrt{1-\frac{N}{M}}.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат и разрешим его относительно N. Получим:

$$N = M\left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{kt}{2}\right),$$

или

$$N = \frac{M}{\operatorname{ch}^2 \frac{kt}{2}}.$$

Упражнения

1. Найти закон движения тела, свободно падающего без начальной скорости, если полагать сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, причем предельная скорость равна 75 *м/сек*.

Отв. $s = \frac{75^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{9}{75} t.$

2. Вес парашютиста вместе с парашютом равен 100 *кГ*. Предельная скорость равна 5 *м/сек*. Каков должен быть радиус R парашюта?

Указание. Использовать эмпирическую формулу $k^2 = \alpha \frac{\gamma f}{q}$, где $k^2 = \frac{c}{m}$ (m — масса падающего тела, c — коэффициент пропорциональности силы сопротивления квадрату скорости), γ—удельный вес воздуха (в среднем $\gamma = 1{,}225$ *кГ/м*^{3}), f — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, в *м*^{2}, q — вес тела в *кГ*, а α — безразмерный эмпирический коэффициент, который для парашюта принимается равным 0,664.

Отв. $R = 3{,}9$ *м*.

3. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы P. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости (коэффициент пропорциональности $k > 0$). Найти закон движения, если в начальный момент времени путь и скорость равны нулю.

Отв. $s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \frac{\sqrt{kP}}{m} t.$

4. Материальная точка массы m отталкивается от центра с силой, пропорциональной расстоянию до этого центра (коэффициент пропорциональности mk^2). В начальный момент времени точка находится на расстоянии a от центра, а скорость перпендикулярна к прямой, соединяющей начальное положение с центром, и равна v_0. Найти уравнения движения и траекторию точки.

Отв. $x = a \operatorname{ch} kt$, $y = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt$, т. е. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1$ (гипербола)

5. На материальную точку массы m параллельно оси Oy в положительном направлении действует сила, равная $\frac{ma^2}{b^2}y$. В начальный момент времени $x=0$, $y=b$, $\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=0$. Найти уравнения движения и траекторию точки.

Отв. $x=at$, $y=b\operatorname{ch}\frac{a}{b}t$; $y=b\operatorname{ch}\frac{x}{b}$ (цепная линия).

6. Найти уравнения движения материальной точки массы m, отталкиваемой силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности mk^2) от центра, который движется равномерно по оси Oy по закону $y=\alpha t$. В начальный момент времени $x=a$, $y=b$, $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=kb+\alpha$.

Отв. $x=a\operatorname{ch}kt$, $y=b(\operatorname{ch}kt+\operatorname{sh}kt)+\alpha t$.

7. Найти уравнения движения материальной точки массы m, движущейся под действием двух сил, из которых одна, пропорциональная ординате y (с коэффициентом пропорциональности mk^2), притягивает точку по перпендикуляру к оси Ox, а другая, пропорциональная абсциссе x (с коэффициентом пропорциональности mp^2), отталкивает ее по перпендикуляру к оси Oy. Движение начинается от точки $A(a, b)$ при нулевой начальной скорости.

Отв. $x=a\cos kt$, $y=b\operatorname{ch}pt$.

8. Решить задачу 5 (см. стр. 146) при условии, что $a=\frac{l}{2}$, и дополнительно определить движение цепочки после ее соскальзывания со стола.

Отв. $T=\sqrt{\frac{l}{g}}\ln(2+\sqrt{3})$. При $t>T$ цепочка будет двигаться по закону $s=l+\frac{\sqrt{3lg}}{2}(t-T)+\frac{g}{2}(t-T)^2$.

9. Узкая длинная трубка образует с вертикальной осью постоянный угол 45° и вращается вокруг нее с постоянной скоростью ω. Внутри трубки находится шарик M с массой m. Пренебрегая трением, найти закон относительного движения шарика, если в начальный момент времени шарик находится на расстоянии a от оси и его скорость относительно трубки равна нулю.

Отв. $r=\left(a-\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\operatorname{ch}\frac{\omega}{\sqrt{2}}t+\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Показательные и гиперболические функции

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
0,00	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000
01	1,01005	0,99005	0,01000	1,00005	0,01000
02	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000
03	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999
04	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998
05	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996
06	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993
07	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989
08	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983
09	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976
0,10	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967
11	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956
12	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943
13	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927
14	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909
15	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889
16	1,17351	0,85214	0,16068	1,01283	0,15865
17	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838
18	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808
19	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775
0,20	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738
21	1,23368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697
22	1,24608	0,80252	0,22178	1,02430	0,21652
23	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603
24	1,27125	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550
25	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492
26	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430
27	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362
28	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291
29	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213

Продолжение табл. 1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
0,30	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131
31	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044
32	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951
33	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852
34	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748
35	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638
36	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521
37	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399
38	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271
39	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136
0,40	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995
41	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847
42	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693
43	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532
44	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364
45	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190
46	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008
47	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820
48	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624
49	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422
0,50	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212
51	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995
52	1,68203	0,59452	0,54375	1,13827	0,47770
53	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538
54	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299
55	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052
56	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798
57	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536
58	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267
59	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990
0,60	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705
61	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413
62	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113
63	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805
64	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490
65	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167
66	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836
67	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498
68	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152
69	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798

Продолжение табл. 1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
0,70	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437
71	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068
72	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691
73	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307
74	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915
75	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515
76	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108
77	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693
78	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271
79	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841
0,80	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404
81	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959
82	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507
83	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048
84	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581
85	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107
86	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626
87	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137
88	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642
89	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139
0,90	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630
91	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113
92	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590
93	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059
94	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522
95	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978
96	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428
97	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870
98	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307
99	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736
1,00	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159
01	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576
02	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987
03	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391
04	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789
05	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181
06	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566
07	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946
08	2,94468	0,33960	1,30254	1,64214	0,79320
09	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688

Продолжение табл. 1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
1,10	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050
11	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406
12	3,06485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757
13	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102
14	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441
15	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775
16	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104
17	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427
18	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745
19	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058
1,20	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365
21	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668
22	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965
23	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258
24	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546
25	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828
26	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106
27	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380
28	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648
29	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913
1,30	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172
31	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428
32	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678
33	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925
34	3,81904	0,26185	1,77860	2,04044	0,87167
35	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405
36	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639
37	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869
38	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095
39	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317

Продолжение табл. 1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
1,40	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535
41	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749
42	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960
43	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167
44	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370
45	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569
46	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765
47	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958
48	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147
49	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332
1,50	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515
51	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694
52	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870
53	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042
54	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212
55	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379
56	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542
57	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703
58	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860
59	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015
1,60	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167
70	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541
80	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681
90	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624
2,00	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403
10	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045
20	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574
30	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010
40	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367
50	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661
60	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903
70	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101
80	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263
90	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396

Продолжение табл. 1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
3,00	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505
10	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595
20	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668
30	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728
40	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777
50	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818
60	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851
70	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878
80	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900
90	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918
4,00	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933
10	60,34029	0,01657	30,16186	30,17843	0,99945
20	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955
30	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963
40	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970
50	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975
60	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980
70	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983
80	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986
90	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989
5,00	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991
10	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993
20	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994
30	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995
40	221,4064	0,00452	110,7009	110,7055	0,99996
50	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997
60	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997
70	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998
80	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998
90	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999
6,00	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999
30	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999

Таблица 2

Показательные и гиперболические функции, гиперболическая амплитуда

x	$e^{\frac{\pi}{2}x}$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$	$\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{th}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}x$	$\frac{2}{\pi}\operatorname{amph}\frac{\pi}{2}x$
0,0	1,0000	1,0000	0,00000	1,0000	0,0000	∞	0,00000
0,1	1,1701	0,8546	0,15773	1,0124	0,1558	6,418	0,09959
0,2	1,3691	0,7304	0,3194	1.0498	0,3042	3,287	0,19679
0,3	1,6020	0,6242	0,4889	1,1131	0,4392	2,2769	0,2895
0,4	1,8745	0,5335	0,6705	1,2040	0,5569	1,7957	0,3760
0,5	2,1933	0,4559	0,8687	1,3246	0,6558	1,5249	0,4553
0,6	2,5663	0,3897	1,0883	1,4780	0,7364	1,3580	0,5269
0,7	3,003	0,3330	1,3349	1,6679	0,8003	1,2495	0,5907
0,8	3,514	0,2846	1,6145	1,8991	0,8501	1,1763	0,6470
0,9	4,111	0,24324	1,9340	2,1772	0,8883	1,1258	0,6898
1,0	4,811	0,20788	2,3013	2,5092	0,9172	1,0903	0,7390
1,1	5,629	0,17766	2,726	2,903	0,9388	1,0652	0,7761
1,2	6,586	0,15184	3,217	3,369	0,9549	1,0472	0,8081
1,3	7,706	0,12976	3,788	3,918	0,9669	1,0343	0,8357
1,4	9,017	0,11090	4,453	4,564	0.9757	1,0249	0,8594
1,5	10,551	0,09478	5,228	5,323	0,9822	1,0181	0,8797
1,6	12,345	0,08100	6,132	6,213	0,9870	1,0132	0,8971
1,7	14,445	0,06923	7,188	7,257	0,9905	1,0096	0,9120
1,8	16,902	0,05916	8,421	8,481	0,9930	1,0070	0,9248
1,9	19,777	0,05056	9,863	9,914	0,9949	1,0051	0,9357
2,0	23,141	0,04321	11,549	11,592	0,9963	1,0037	0,9450

Таблица 3

Десятичные логарифмы sh x

(значения lg увеличены на 10)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	$-\infty$	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1476	1777	2060	2325	2576	2814
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353	9419
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	10,0053
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527

Продолжение табл. 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4527	4621	4664	4708	4751
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095
5,1	11,9139	9182	9225	9269	9312	9356	9399	9443	9486	9529
5,2	11,9573	9616	9660	9703	9747	3790	9833	9877	9920	9964
5,3	12,0007	0051	0094	0137	0181	0224	0268	0311	0355	0398
5,4	12,0442	0485	0528	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0832
5,5	12,0876	0919	0963	1006	1050	1093	1136	1180	1223	1267
5,6	12,1310	1354	1397	1440	1484	1527	1571	1614	1658	1701
5,7	12,1744	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2048	2092	2135
5,8	12,2179	2222	2266	2309	2352	2396	2439	2483	2526	2570
5,9	12,2613	2656	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2960	3004

Таблица 4

Десятичные логарифмы ch x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234
0,8	0,1236	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986

Продолжение табл. 4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	1721	0764	0808	0851
3,2	1,0984	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2975	3018
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754
4,1	1,4797	4840	4884	2927	4971	5014	5057	5101	5144	5188
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095
5,1	1,9139	9182	9226	9269	9313	9356	9399	9443	9486	9530
5,2	1,9573	9617	9660	9703	9747	9790	9843	9877	9921	9964
5,3	2,0007	0051	0094	0138	0181	0225	0268	0311	0355	0398
5,4	2,0442	0485	0529	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0833
5,5	2,0876	0919	0963	1006	1050	1093	1137	1180	1223	1267
5,6	2,1310	1354	1397	1441	1484	1527	1571	1614	1658	1701
5,7	2,1745	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2049	2092	2135
5,8	2,2179	2222	2266	2300	2353	2396	2439	2483	2526	2570
5,9	2,2613	2657	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2961	3004

Таблица 5

Десятичные логарифмы th x

(значения lg увеличены на 10)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	$-\infty$	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531
0,1	8,9986	9,0397	0771	1115	1433	1729	2004	2263	2506	2736
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573
0,5	9,6648	6721	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9680	9686	9692	9698	9704
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9790	9794	9798	9802
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927
2,4	9,9929	9930	9931	9933	9934	9935	9937	9938	9939	9940
2,5	9,9941	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949	9950	9951
2,6	9,9952	9953	9954	9955	9956	9957	9958	9958	9959	9960
2,7	9,9961	9962	9962	9963	9964	9995	9965	9966	9967	9967
2,8	9,9968	9969	9969	9970	9970	9971	9972	9972	9973	9973

Таблица 6

Производные гиперболических и обратных гиперболических функций*)

1) $(\operatorname{sh} ax)' = a \operatorname{ch} ax;$

2) $(\operatorname{ch} ax)' = a \operatorname{sh} ax;$

3) $(\operatorname{th} ax)' = \dfrac{a}{\operatorname{ch}^2 ax};$

4) $(\operatorname{cth} ax)' = -\dfrac{a}{\operatorname{sh}^2 ax};$

5) $(\operatorname{sch} ax)' = -a \operatorname{sch} ax \operatorname{th} ax;$

6) $(\operatorname{csch} ax)' = -a \operatorname{csch} ax \operatorname{cth} ax;$

7) $\left(\operatorname{Arsh} \dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}};$

8) $$\left(\operatorname{Arch} \frac{x}{a}\right)' = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \left(\operatorname{Arch} \dfrac{x}{a} > 0,\ \dfrac{x}{a} > 0\right); \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \left(\operatorname{Arch} \dfrac{x}{a} < 0,\ \dfrac{x}{a} > 0\right); \end{cases}$$

9) $\left(\operatorname{Arth} \dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{a}{a^2 - x^2} \qquad (x^2 < a^2);$

10) $\left(\operatorname{Arcth} \dfrac{x}{a}\right)' = -\dfrac{a}{x^2 - a^2} \qquad (x^2 > a^2);$

11) $$\left(\operatorname{Arsch} \frac{x}{a}\right)' = \begin{cases} -\dfrac{a}{x\sqrt{a^2 - x^2}} & \left(\operatorname{Arsch} \dfrac{x}{a} > 0,\ 0 < \dfrac{x}{a} < 1\right); \\ \dfrac{a}{x\sqrt{a^2 - x^2}} & \left(\operatorname{Arsch} \dfrac{x}{a} < 0,\ 0 < \dfrac{x}{a} < 1\right); \end{cases}$$

12) $\left(\operatorname{Arcsch} \dfrac{x}{a}\right)' = -\dfrac{a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}.$

---

*) Таблицу основных производных см. на стр. 51.

Таблица 7

Интегралы от гиперболических и обратных гиперболических функций *)

1) $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \frac{x}{2} + C;$

2) $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{x}{2} + C;$

3) $\int \operatorname{sh}^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} x\,dx;$

4) $\int \operatorname{ch}^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} x\,dx;$

5) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2} + C;$

6) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C = 2\operatorname{arctg} e^x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = \frac{1}{1-n}\operatorname{sh}^{1-n} x \operatorname{ch} x - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \quad (n > 1);$

8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{n-1}\operatorname{ch}^{1-n} x \operatorname{sh} x + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n > 1);$

9) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx = x - \operatorname{th} x + C;$

10) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx = x - \operatorname{cth} x + C;$

11) $\int \operatorname{th}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} x\,dx;$

12) $\int \operatorname{cth}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cth}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{cth}^{n-2} x\,dx;$

13) $$\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\operatorname{sh}(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sh}(a-b)x + C \quad (a^2 \neq b^2);$$

14) $$\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\operatorname{sh}(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sh}(a-b)x + C \quad (a^2 \neq b^2);$$

---

*) Таблицу основных интегралов см. на стр. 52.

15) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{2(a+b)} \operatorname{ch}(a+b)x +$
$$+ \frac{1}{2(a-b)} \operatorname{ch}(a-b)x + C \qquad (a^2 \neq b^2);$$

16) $\int \operatorname{Arsh} x\, dx = x \operatorname{Arsh} x - \sqrt{1+x^2} + C;$

17) $\int \operatorname{Arch} x\, dx = x \operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2-1} + C;$

18) $\int \operatorname{Arth} x\, dx = x \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C;$

19) $\int \operatorname{Arcth} x\, dx = x \operatorname{Arcth} x - \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C;$

20) $\int x \operatorname{Arsh} x\, dx = \frac{1}{4} [(2x^2+1) \operatorname{Arsh} x - x\sqrt{1+x^2}] + C;$

21) $\int x \operatorname{Arch} x\, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \operatorname{Arch} x - x\sqrt{x^2-1}] + C;$

22) $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax + C;$

23) $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax + C;$

24) $\int x^n \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{ch} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{ch} ax\, dx;$

25) $\int x^n \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{sh} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sh} ax\, dx;$

26) $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\, dx =$
$$= \frac{1}{a^2+b^2} (a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx) + C;$$

27) $\int \operatorname{ch} ax \cos bx\, dx =$
$$= \frac{1}{a^2+b^2} (a \operatorname{sh} ax \cos bx + b \operatorname{ch} ax \sin bx) + C;$$

28) $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx =$
$$= \frac{1}{a^2+b^2} (a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx) + C;$$

29) $\int \operatorname{ch} ax \sin bx\, dx =$
$$= \frac{1}{a^2+b^2} (a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx) + C.$$

30) $\int \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2} + C;$

31) $\int \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2} + C & \left(\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0\right); \\ x\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + \sqrt{x^2-a^2} + C & \left(\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0\right); \end{cases}$

32) $\int \operatorname{Arth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2) + C;$

33) $\int \operatorname{Arcth}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2) + C;$

34) $\int x\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{x^2+a^2} + C;$

35) $\int x\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx =$

$$= \begin{cases} \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{x^2-a^2} + C & \left(\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0\right); \\ \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{x^2-a^2} + C & \left(\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0\right); \end{cases}$$

36) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x} = \operatorname{csch}\left(\ln\operatorname{ch}\frac{x+a}{2} - \ln\operatorname{ch}\frac{x-a}{2}\right) + C =$

$$= 2\operatorname{csch} a\,\operatorname{arth}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{th}\frac{a}{2}\right) + C;$$

37) $\int \frac{dx}{\cos a + \operatorname{ch} x} = 2\operatorname{cosec} a\,\operatorname{arctg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right) + C;$

38) $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\operatorname{ch} x + C;$

39) $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\operatorname{sh} x + C.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, Гостехиздат, 1957.
2. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, ГИИЛ, 1948.
3. Люстерник Л. А., Кратчайшие линии. Вариационные задачи, Гостехиздат, 1955.
4. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов рядов, сумм и произведений, Гостехиздат, 1948.
5. Фишман Н. М., Комплексные числа, ряды и гиперболические функции, ГТТИ, 1933.
6. Шерватов В. Г., Гиперболические функции, Гостехиздат, 1954.
7. Штаерман И. Я., Гиперболические функции, ГТТИ, 1935.
8. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1948.

Авраам Рувимович Яnnольский.
Гиперболические функции.

Редактор *Ф. Л. Варпаховский.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов*
Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 16/XII 1959 г. Подписано к печати 7/IV 1960 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 6,125. Условн. печ. л. 10,05. Уч.-изд. л. 9,57. Тираж 17 000 экз. Т-01078. Цена книги 3 руб. 90 коп. Заказ № 975.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 3 р. 90 к.